II. ENTSCHEIDUNG UNTER UNSICHERHEIT[1]

1. Definition von Unsicherheit

1) Für das folgende **definieren wir Unsicherheit** in Anlehnung an Gravelle und Rees (vgl. Seite 537) wie folgt:

Unsicherheit liegt genau dann vor, wenn zukünftige Realisierungen von Variablen nicht genau einen sicheren Wert annehmen, sondern **wenn mehrere Werte möglich sind**.

2) Beispielsweise **entsteht Unsicherheit** dadurch,

- dass **eine Entscheidung nicht genau eine sichere Konsequenz** hat, sondern dass mehrere möglich sind;
- dass **in Zukunft nicht genau ein sicherer Zustand** gilt, sondern dass mehrere möglich sind.

3) Entscheidungen unter Unsicherheit treten beispielsweise bei der Analyse von fairen Spielen auf wie z.B. das Werfen eines Würfels oder einer Münze. Einleitend beschäftigen wir uns deswegen im folgenden Abschnitt mit **Entscheidungssituationen bei fairen Spielen**.

Die **Varianz, der Streuungskoeffizient oder die Volatilität** sind also geeignete Masse zur **Messung von Unsicherheit**; sie werden jedoch meist als **Risikomasse** bezeichnet (man vergleiche z.B. die Kapitalmarkttheorie).

Unsicherheit ist neutral: Abweichungen in beide Richtungen sind möglich.

Risiko ist im Prinzip negativ bewertet: hier sollten eigentlich ausschliesslich Abweichungen in die "schlechte" Richtung betrachtet werden; allerdings ist der übliche Sprachgebrauch nicht so exakt. (Risiko kommt aus dem Altitalienischen und bedeutet: „Klippe, die zu umschiffen ist“.)

---

[1] Als Referenzgrundlage werden hier benutzt:
Microeconomics, Hugh Gravelle and Ray Rees, London and New York 1988; first published 1981;
Games and Decisions, Duncan Luce and Howard Raiffa, New York, Sydney 1967; first published 1957.

2. Faire Spiele

Beispiele für faire Spiele sind das Werfen eines **Würfels** oder einer **Münze**.

1) Zunächst werde ein Spiel mit n Ergebnissen betrachtet. Die möglichen Gewinne seien a_1, ... , a_n CHF, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, ..., p_n zur Auszahlung gelangen. Es gelte

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ und } p_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Der Erwartungswert b dieses Spiels ist

$$b := p_1 a_1 + ... + p_n a_n.$$

Dieser **Erwartungswert** wird oft als

"fairer Preis"

für das Spiel betrachtet.

2) Jedoch hat **D. Bernoulli** mit seinem **St. Petersburger Paradox** gezeigt, dass man allgemein so nicht vorgehen kann.

Das Paradox lautet wie folgt:

Es werde eine "faire" Münze geworfen. Der Spieler erhalte 2^n CHF, falls nach n Würfen zum ersten Mal Kopf oben liegt.

Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Wk für Kopf}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\substack{\text{Wk für } n-1 \text{ mal} \\ \text{nicht Kopf}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Für den Erwartungswert ergibt sich somit

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + ... = 1 + 1 + 1 + ...$$

Der Erwartungswert existiert nicht; d.h. man wäre hiernach bereit für dieses Spiel einen **Geldbetrag in beliebiger Höhe als "fairen Preis"** zu bezahlen.

3) Luce und Raiffa schreiben dazu auf Seite 20:

"As a description of behavior, this is silly! As Bernoulli emphasized, people do not, and will not, behave in accord with the monetary expected value of this gamble."

Bernoulli versuchte dieses Paradox dadurch zu lösen, dass er den **"intrinsischen Wert" des Geldeinkommens** einführte, wobei der intrinsische Wert des Geldeinkommens mit dem Geldeinkommen wächst, jedoch mit einer abnehmenden Rate; er greift somit auf die Idee des **abnehmenden Grenznutzens** zurück.

Als Beispiel lässt sich die Logarithmusfunktion nehmen.

Der "Nutzen" von m CHF beträgt hiernach nicht m sondern lediglich log(m).

Weiterhin hält Bernoulli an dem Prinzip fest, dass ein **Erwartungswert** gebildet werden soll. Allerdings werden **nicht die Geldauszahlungen** des Spiels mit ihren **Eintretenswahrscheinlichkeiten gewichtet** zu einem Erwartungswert gemittelt, vielmehr wird der **intrinsische Wert dieser Geldauszahlungen für die Erwartungswertbildung** benutzt.

Für den "fairen Preis" des obigen Spiels erhält man dann

$$b = \tfrac{1}{2} \cdot \log(2) + \tfrac{1}{4} \log(4) + \tfrac{1}{8} \log(8) \quad + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log\left(2^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \log(2)$$

$$= \log(2) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \right)$$

$= 0.30 \cdot 2$ (auf zwei Stellen gerundet)

$= 0.60$

4) Dieser Vorschlag ist der **Kritik** ausgesetzt, dass der derart eingeführte **"Nutzenbegriff"** jeder Grundlage entbehrt. Es handelt sich hierbei um eine **"vollkommen ad hoc"** eingeführte

"Lösung" des Problems, die jeglicher Fundierung entbehrt. Es gibt beliebige Funktionen mit dieser Eigenschaft.

5) Die **Lösungsidee** ist von folgenden Überlegungen geleitet:

Ziel "is a **construction of a utility function** for each individual which, in some sense, **represents his choices among gambles** and which has as a consequence the fact that the **expected value of utility represents the utility of the corresponding gamble**" (Luce and Raiffa, S. 21).

Von Neumann und Morgenstern haben hierzu wesentliche Grundideen entwickelt.

Zur Illustration der wesentlichen Idee, die dem Konzept der "Nutzenfunktion" in diesem Zusammenhang zugrunde liegt, diene **folgendes Beispiel**:

6) Gelte: A werde B vorgezogen, B werde C vorgezogen und A werde C vorgezogen. Jede Menge von Zahlen {a, b, c} mit a > b > c spiegelt diese Präferenzordnung wider.

Angenommen, das Individuum wird nach den **Präferenzen bezüglich der folgenden Alternativen** gefragt:

(i) Es erhält B sicher ("**certain option**").

(ii) Es erhält folgendes Spiel (Lotterie) mit den Ergebnissen A und C: mit Wahrscheinlichkeit p erhält es A und mit Wahrscheinlichkeit 1-p erhält es C ("**lottery option**").

7) Folgendes Verhalten erscheint plausibel:

wenn **p "nahe genug" bei 1** ist, so wird die **"lottery option"** bevorzugt, da A höher eingeschätzt wird als B;

wenn **p "nahe genug" bei 0** ist, so wird die **"certain option"** bevorzugt, da B höher eingeschätzt wird als C.

Dies legt die **Vermutung** nahe:

wenn p stetig von 1 nach 0 variiert, so muss die Präferenz des Individuums von der "lottery option" umschlagen zu der "certain option".

Für das folgende wird angenommen, dass es nur einen solchen Punkt des **Wechsels von der "lottery option" zur "certain**

option" gibt und dass bei diesem Punkt das **Individuum indifferent** zwischen diesen beiden Optionen ist.

8) Angenommen, dieser Punkt sei bei p = 2/3. Ferner gelte o.B.d.A. A = 1 und C = 0. Es ist nahe liegend, dann B den Wert von 2/3 zuzuordnen.

Falls tatsächlich B = 2/3 gesetzt wird, so ist B das

"**faire sichere Äquivalent**"

für das Spiel mit A und C als Ergebnis und den Eintrittswahrscheinlichkeiten p = 2/3 und 1-p = 1/3, in dem Sinne, dass der "Nutzen" von B gleich dem "Erwartungsnutzen" des Spieles ist:

$$1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1.$$

Es existiert eine Lotterie mit geeigneten Eintretenswahrscheinlichkeiten, so dass gilt:

der **"Erwartungsnutzen" des Spiels** ist gleich dem
"Nutzen" von A • Eintretenswahrscheinlichkeit von A plus
"Nutzen" von C • Eintretenswahrscheinlichkeit von C

und
der **"Nutzen" des "fairen sicheren Äquivalents"** ist gleich dem
"Nutzen" von B • 1.

Hierbei ist zu beachten, dass das Eintreten von B als sicher angesehen wird, d.h. die entsprechende Eintretenswahrscheinlichkeit ist 1.

9) Die obige Präferenzordnung zwischen den Ergebnissen A, B und C lässt sich also durch das Zahlen-Tripel

$$\left(1, \frac{2}{3}, 0\right)$$

wiedergeben.

Stattdessen kann man aber auch

$$\left(a+b, \frac{2}{3}a+b, b\right)$$

angeben mit a > 0.

10) Luce und Raiffa schreiben hierzu auf Seite 22:

"We note that in all such triples the numerical difference between the utility assignments to B and C [$= \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$] is twice that between A and B [$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$]. Does this permit us to say that going from B to C is twice as (or even just more) desirable than going from A to B? [Es müsste richtigerweise wohl heissen: "from C to B" und "from B to A".] We think not! The number 2/3 was determined by choices among risky alternatives, and it reflects attitudes toward gambling, not toward the two intervals. Suppose, for example, that, because of his aversion to gambling, our subject reported he would be indifferent between paying out $9 and having a 50-50 chance of paying out $10 or nothing. His response could then be summarized by saying that his utilities for $0, -$9, and -$10 are 1, 1/2, and 0. We would be unwilling, however, to say that going from -$10 to -$9 is "just as enjoyable" as going from -$9 to $0".

Formalisiert gilt hier:

Nutzen (0) = 1

Nutzen (-9) = $\frac{1}{2}$

Nutzen (-10) = 0

Für die Indifferenzrelation ergibt sich:

Nutzen (-9) • 1 = Nutzen (-10) • $\frac{1}{2}$ + Nutzen (0) • $\frac{1}{2}$, also

$\frac{1}{2} \cdot 1 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}$, also

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Für die Nutzenunterschiede folgt:

Nutzen (-9) - Nutzen (-10) = $\frac{1}{2}$ - 0 = $\frac{1}{2}$

Nutzen (0) - Nutzen (-9) = 1 - $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$.

"In this theory it is extremely important to accept the fact that the subject's preferences among alternatives and lotteries came prior to our numerical characterization of them. **We do not want to slip into saying that he preferred A to B because A has the higher utility; rather, because A is preferred to B, we assign A the higher utility."**

11) Auf Seite 23 fahren sie fort:

"Once one has this idea of utility, then the task is to develop a set of consistency requirements which, on the one hand, seem plausible as an idealized model of human preferences, and which, on the other, allow one to prove that the utility assignments can be made. In the next section we shall present such a set of axioms, but let us first suggest the general nature of these consistency demands by a few descriptive and intuitive words:

i. **Any two alternatives shall be comparable,** i.e., given any two, the subject will prefer one to the other or he will be indifferent between them. **(Vollständigkeit)**

ii. Both the preference and indifference relations for lotteries are **transitive**, i.e., given any three lotteries A, B and C, if he prefers A to B and B to C, then he prefers A to C; and if he is indifferent between A and B and between B and C, then he is indifferent between A and C. **(Transitivität)**

iii. In case a lottery has as one of its alternatives (prizes) another lottery, then the first lottery is **decomposable** into the more basic alternatives **through the use of the probability calculus**. **(Kein Spass am Spielen)**

iv. If two **lotteries are indifferent** to the subject, then they are **interchangeable as alternatives** in any compound lottery. **(Substituierbarkeit)**

v. If **two lotteries** involve the **same two alternatives,** then the one in which the **more preferred alternative has a higher probability** of occurring is **itself preferred**. **(Monotonie)**

vi. If A is preferred to B and B to C, then **exists a lottery involving A and C** (with appropriate probabilities) which is **indifferent to B." (Stetigkeit)**

3. Grundlagen für das Konzept "Erwartungsnutzen"

3.1. Grundbegriffe

1) Eine **Lotterie L** besteht i.a. aus zwei n-Tupeln

$L = (\vec{p}; \vec{X})$ mit

$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$,

$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Die p_i $(1 \leq i \leq n)$ sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Lotterie die Gewinne X_i $(1 \leq i \leq n)$ zur Auszahlung bringt.

Für die p_i wird gefordert

$$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

2) Für die **Gewinne** X_i **sei** $\succeq$ **eine Präferenzordnung**. Sie sei reflexiv, vollständig und transitiv.
D.h. es gilt für alle X_i, X_j und X_k :

(1) $X_i \succeq X_i$;

(2) $X_i \succeq X_j$ oder $X_j \succeq X_i$;

(3) wenn $X_i \succeq X_j$ und $X_j \succeq X_k$,

dann $X_i \succeq X_k$.

Die Relationen $\sim$ und $\succ$ führt man wie üblich ein, d.h. es gilt:

$X_i \sim X_j$ gdw. $X_i \succeq X_j$ und $X_j \succeq X_i$,

$X_i \succ X_j$ gdw. $X_i \succeq X_j$ und nicht $(X_i \sim X_j)$.

Dann folgt, dass die Relation $\sim$ transitiv und reflexiv ist und dass die Relation $\succ$ transitiv ist.

Falls die X_i Geldzahlungen wiedergeben, so lassen sich die Relationen $\succeq$, $\succ$ und $\sim$ als $\geq$, $>$ bzw. $=$ interpretieren und die obigen Beziehungen sind erfüllt.

Es gelte

$$X_B := \underset{i,\,\succeq}{\mathrm{Max}}\; X_i \quad \text{und} \quad X_W := \underset{i,\,\succeq}{\mathrm{Min}}\; X_i$$

mit $X_B \succ X_W$.

D.h. mit X_B wird (einer) der Gewinn(e) bezeichnet, der am meisten präferiert wird, und mit X_W wird (einer) der Gewinn(e) bezeichnet, der am wenigsten geschätzt wird. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass X_B streng X_W vorgezogen wird; d.h. dass nicht alle Gewinne gleich eingeschätzt werden.

3) Als **Standard-Lotterie** wird bezeichnet

$$L_u := (u, 1-u\,;\; X_B, X_W)$$

mit $0 \leq u \leq 1$.

Als Kurzbezeichnung ist auch üblich

$$L_u = (u\,; X_B, X_W).$$

4) In Analogie zu 2) sei für die **Menge der Lotterien** $\{L_1, L_2, ..\}$ $\succeq$ **eine reflexive, vollständige und transitive Präferenzordnung**.

Für je zwei beliebige Standard-Lotterien L_{u_1} und L_{u_2} gelte die folgende **Monotonieeigenschaft** (vgl. v. von 11) aus II.2.)**:**

$$L_{u_1} \succeq L_{u_2} \quad \text{gdw.} \quad u_1 \geq u_2 .$$

Analoges folgt dann für $\succ$ und $>$ bzw. $\sim$ und $=$.

D.h. die Präferenzordnung auf den Lotterien kann durch die Relationen der reellen Zahlen u_i aus dem Einheitsintervall wiedergegeben werden.

5) Aus **Stetigkeitsüberlegungen** (vgl. vi. von 11) aus II.2.) wird für alle Gewinne X_i die Existenz genau einer reellen Zahl $u(X_i)$ für i=1, …, n gefordert, die eine Eintretenswahrscheinlichkeit wiedergibt, mit

$$u(X_i) \geq 0 \quad \text{und} \quad u(X_i) \leq 1 \text{ und}$$

$$X_i \sim (u(X_i); X_B, X_W) =: \tilde{X}_i$$

X_i ist hierbei als eine spezielle Lotterie zu interpretieren mit dem sicheren Gewinn X_i, d.h.

$$X_i = (p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n; X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n) =: L_{X_i}$$

mit $p_k = 0$ für $k = 1, \ldots, n$ und $k \neq i$,

$$p_k = 1 \text{ für } k = i.$$

6) Die Lotterie $\tilde{X}_i = (u(X_i); X_B, X_W)$ wird auch als "**äquivalente Standard-Lotterie**" zu X_i bezeichnet.

Man beachte, dass das Individuum dieser Lotterie $\tilde{X}_i$ und dem sicheren Gewinn X_i gegenüber indifferent ist, da ja gilt

$$X_i \sim \tilde{X}_i.$$

Der sichere Gewinn X_i lässt sich als **"Sicherheitsäquivalent"** zur Lotterie $\tilde{X}_i$ interpretieren.

7) In 5) wird aus Stetigkeitsüberlegungen die Existenz einer Abbildung postuliert von der Menge der Gewinne $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ in die Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$u : \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \quad \rightarrow \quad [0,1]$$

und für

$$u_i := u(X_i)$$

gilt

$$X_i \sim (u_i; X_B, X_W).$$

Weiter unten wird sogar die Umkehrbarkeit der Funktion u(X) auf der Menge der Gewinne gefordert.

3.2. Die Nutzenfunktion

1) Im folgenden beschränken wir uns auf Lotterien mit zwei Gewinnen X_1 und X_2, die Geldwerte darstellen und aus dem Intervall $[X_{min}, X_{max}]$ der reellen Zahlen sind.

Die Werte **X sind also reelle Zahlen** und die Relationen $\succeq$, $\succ$ bzw. $\sim$ für die Gewinne (Geldwerte) können als $\geq$, $>$ bzw. $=$ interpretiert werden.

Gegeben sei also folgende Lotterie L

$$L = (p, 1-p;\ X_1,\ X_2).$$

2) Als **Erwartungswert der Lotterie L** ergibt sich

$$E[L] = p \cdot X_1 + (1-p) \cdot X_2 = \overline{X}$$

3) Ferner sei **u eine geeignete Nutzenfunktion** auf dem obigen Intervall mit

$$u : [X_{min}, X_{max}] \quad \rightarrow \quad [0, 1].$$

und $u'(X) > 0$.

4) Der **Erwartungsnutzen der Lotterie L** ergibt sich zu

$$u(L) = p \cdot u(X_1) + (1-p) \cdot u(X_2)$$

Die Bezeichnung erfolgt in Anlehnung an den Begriff des Erwartungswertes einer analogen Zufallsvariable X:

$$E[X] = p \cdot X_1 + (1-p) \cdot X_2$$

Als **Sicherheitsäquivalent der Lotterie L** wird das sichere Einkommen $\tilde{X}$ definiert, für das

$$\tilde{X} \sim L \quad \text{bzw. } u(\tilde{X}) = u(L)$$

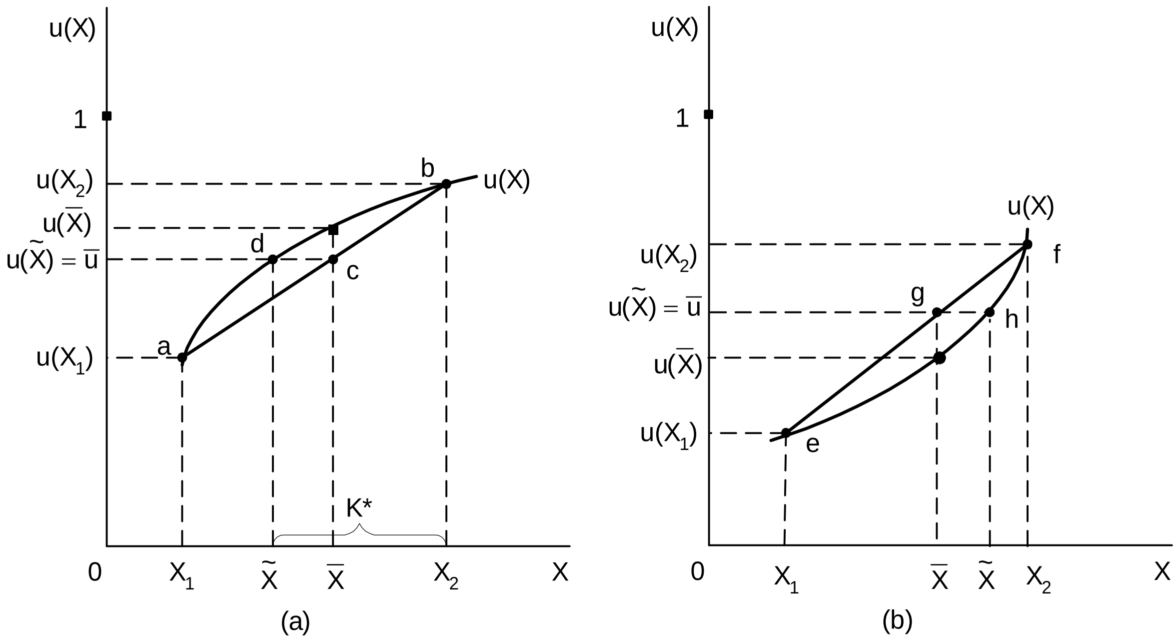
gilt. Dieses Einkommen kann man als eine Lotterie mit dem sicheren Gewinn in Höhe des Einkommens $\tilde{X}$ interpretieren.

5) Die Relation zwischen dem **Sicherheitsäquivalent $\tilde{X}$ der Lotterie L** und dem **Erwartungswert $\bar{X}$ der Lotterie L** hängt von der zweiten Ableitung von u ab. Dabei gilt:

a) Risikoaversion korrespondiert mit einer strikt konkaven Nutzenfunktion, d.h. u" < 0.

b) Risikofreudigkeit korrespondiert mit einer strikt konvexen Nutzenfunktion, d.h. u" > 0.

c) Risikoneutralität korrespondiert mit einer linearen Nutzenfunktion, d.h. u" = 0.



Figur 1

In den obigen Grafiken gilt für die Lotterie L:

$$E[L] = \bar{X},$$

$$u(L) = u(\tilde{X}) = \bar{u}$$

Der Punkt c ist das Tupel $(\bar{X}, \bar{u})$ auf der Sehne $\overline{ab}$.

Der Punkt d ist das Tupel ($\tilde{X}, \bar{u}$) auf dem Graph u(X) mit $\bar{u}$ = u($\tilde{X}$).

Wegen u'>0 ist u umkehrbar, und es gilt

$$u^{-1}(\bar{u}) \;=\; u^{-1}\left(u\left(\tilde{X}\right)\right) = \tilde{X}.$$

2) **In Figur 1(a)** ist die Nutzenfunktion u(X) strikt konkav. Es liegt also **Risikoaversion** vor.

Gegeben seien die beiden Einkommen X_1, X_2, die beiden Nutzenindizes $u(X_1)$, $u(X_2)$ und damit die beiden Punkte a und b auf der Nutzenfunktion u(X).

Für den **Erwartungswert der Lotterie L** ergibt sich

$$E[L] = \bar{X} = p\,X_1 + (1-p)\,X_2.$$

Für den **Erwartungsnutzen der Lotterie L** gilt

$$\begin{aligned} u(L) &= \bar{u} \\ &= p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2). \end{aligned}$$

3) Es gilt:

Die Punkte auf der Sehne $\overline{ab}$ entsprechen den Tupeln **(Erwartungswert der Lotterie, Erwartungsnutzen der Lotterie)** bzw. $\left(\bar{X}, \bar{u}\right)$.

Dies ergibt sich wie folgt:

Die Gerade $\overline{ab}$ hat die Steigung

$$\frac{u(X_2)-u(X_1)}{X_2 - X_1}$$

und geht durch den Punkt

$$(X_1, u(X_1)).$$

Sie lässt sich also darstellen als

$$f(X) = u(X_1) + \frac{u(X_2)-u(X_1)}{X_2 - X_1}\,(X - X_1).$$

Für $\overline{X} = pX_1 + (1-p)X_2$ gilt also

$$f(\overline{X}) = u(X_1) + \frac{u(X_2) - u(X_1)}{X_2 - X_1}\,(pX_1 + (1-p)\,X_2 - X_1)$$

$$= u(X_1) + \frac{u(X_2) - u(X_1)}{X_2 - X_1}\,(1-p)\,(X_2 - X_1)$$

$$= u(X_1) + (u(X_2) - u(X_1))\,(1-p)$$

$$= p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2)$$

$$= \overline{u}$$

$$= u(L).$$

In Figur 1(a) hat der Punkt c die Koordinaten $(\overline{X}, \overline{u})$.

4) Das sicherheitsäquivalente Einkommen $\tilde{X}$ zu der Lotterie L wird definiert durch

$$u(\tilde{X}) = u(L)$$

$$= \overline{u}$$

bzw. $\tilde{X} := u^{-1}(\overline{u})$.

In Figur 1(a) hat der Punkt d die Koordinaten

$$\left(u^{-1}(\overline{u}), \overline{u}\right) = \left(u^{-1}(u(\tilde{X})), u(\tilde{X})\right) = \left(\tilde{X}, u(\tilde{X})\right) = \left(\tilde{X}, \overline{u}\right)$$

= **(Sicherheitsäquivalent, Erwartungsnutzen)**

Wegen der strikten Konkavität von u und $u(\tilde{X}) = \overline{u}$ gilt

$$\tilde{X} < \overline{X}.$$

5) In Figur 1(b) wird der Fall der **Risikofreudigkeit** dargestellt. Es gelten die zu 4) analogen Aussagen mit den entsprechenden Anpassungen.

6) Bei **Risikoneutralität** ist die Funktion u(X) identisch mit der Geraden $\overline{ab}$. Die Nutzenfunktion ist hier linear, und es gilt

$$\overline{u} = u(\overline{X})$$

und $\overline{X} = \widetilde{X}$.

7) Für die Nutzenfunktion gilt also:

$$u : \{X \mid X \text{ Einkommen}; X_{Min} \leq X \leq X_{Max}\} \rightarrow [0, 1],$$

$u'(X) > 0$,

$$u''(X) \begin{cases} < 0 & \text{für Risikoaversion,} \\ = 0 & \text{für Risikoneutralität,} \\ > 0 & \text{für Risikofreudigkeit.} \end{cases}$$

4. Risikoaversion

4.1. Zur Annahme der Risikoaversion

1) Die **übliche Annahme** bzgl. der Haltung der Entscheidungsträger lautet:

Alle Entscheidungsträger sind risikoavers.

Die entsprechende Nutzenfunktion u(X) ist somit strikt konkav, d.h. $u'(X) > 0$ und $u''(X) < 0$.

2) Als **Begründung** lassen sich folgende empirische Feststellungen anführen:

(1) Die meisten Leute werden beispielsweise die folgende Lotterie ablehnen:

$$L = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 50, -49\right).$$

(2) **Es werden Versicherungen abgeschlossen**. Man vergleiche hierzu die Aussagen unter 4.2. weiter unten.

(3) Man kann feststellen, dass **die Entscheidungsträger Diversifikation von Risiken anstreben,** was wiederum als Ausdruck von Risikoaversion interpretiert werden kann.

(4) "A further reason for making the assumption of risk aversion is analytical convenience. We thereby obtain a 'well-behaved' representation of the decision-taker's preferences, for which sufficiency conditions for optimal solutions are satisfied, and local maxima are always also global maxima." (Gravelle and Rees, Seite 555).

4.2. Konsequenzen für die Nachfrage nach Versicherungen

1) Zur **Nachfrage nach Versicherungen** lässt sich unter Bezug auf Figur 1(a) aus Abschnitt 3.2. folgendes festhalten**:**

2) Der Entscheidungsträger **besitze** die Lotterie L mit

$$L = (p, 1-p\,; X_1, X_2),$$

wobei X_i die Einkommen sind, je nachdem, ob der Zustand 1 oder 2 eintrete. Z.B. kann ein Schadenereignis das Einkommen von X_2 auf X_1 senken.

Angenommen der Entscheidungsträger kann sich vollständig versichern gegen Bezahlung der Versicherungsprämie K. Mit Versicherung wird aus der obigen Lotterie L die Lotterie L_V

$$L_V = (p, 1-p\,;\, X_2 - K, X_2 - K).$$

Hier hat er also das sichere Einkommen X_2 - K, welches gleich dem obigen schadenfreien Einkommen X_2 ist vermindert um die Versicherungsprämie K.

Für die **Nutzenindizes der beiden Lotterien** gilt

$$\begin{aligned} u(L) &= p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2) \\ &= \overline{u} \\ u(L_V) &= u(X_2 - K). \end{aligned}$$

3) Die **maximale Versicherungsprämie K*** bestimmt sich durch

$$u(X_2 - K^*) = \overline{u}\,,$$

da hier die Nutzenniveaus gleich sind.

Für das sicherheitsäquivalente Einkommen $\tilde{X}$ gilt

$$\overline{u} = u(\tilde{X})$$

$$\Rightarrow X_2 - K^* = \tilde{X}, \text{ da } \overline{u} = u(X_2 - K^*) = u(\tilde{X}) \text{ und } u'>0$$

$$\Rightarrow K^* = X_2 - \tilde{X} > X_2 - \overline{X}\,,$$

da Risikoaversion vorliegt, was $\tilde{X} < \overline{X}$ impliziert.

Da

$$\begin{aligned} p(X_2 - X_1) &= X_2 - (pX_1 + (1-p)X_2) \\ &= X_2 - \overline{X} \\ &< X_2 - \tilde{X} \\ &= K^* \end{aligned}$$

gilt, impliziert Risikoaversion, dass der **Entscheidungsträger bereit ist, eine Versicherungsprämie zu zahlen, die grösser ist als der erwartete Verlust** $p(X_2 - X_1)$. K* gibt die maximale Zahlungsbereitschaft des Entscheidungsträgers wieder, und $p(X_2 - X_1)$ wird als „faire Prämie" bezeichnet.

In Figur 1 auf Seite 62 lassen sich diese beiden Prämien wie folgt darstellen. Die faire Prämie ergibt sich aus dem Erwartungswert der Lotterie:

$$E[L] = \overline{X} = p\,X_1 + (1-p)\,X_2$$

$$= X_2 - p(X_2 - X_1)$$

$$= X_2 - \text{Erwartungswert des Schadens}$$

$$= X_2 - \text{faire Prämie}$$

Also folgt:

Faire Prämie $= X_2 - \overline{X}$

Für die maximale Prämie gilt: $K^* = X_2 - \tilde{X}$

Wegen der Risikoaversion gilt $\tilde{X} < \overline{X}$, also ist die faire Prämie kleiner als die maximale Zahlungsbereitschaft.

4.3. Konsequenzen bzgl. der Ordinalität bzw. Nicht-Ordinalität der Nutzenfunktion

1) Betrachten wir zunächst die **ordinalen Nutzenfunktionen** aus der Theorie des Konsumenten bei Sicherheit. Ein wesentliches Ergebnis ist, dass die dortigen Nutzenfunktionen eindeutig sind bis auf positive monotone Transformationen. Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, können deswegen **Forderungen nach Konvexität oder Konkavität an ordinale Nutzenfunktion nicht gestellt werden können**.

Beispiel:
Angenommen $u(x) := \sqrt{x}$ wäre eine ordinale Nutzenfunktion, so gilt zunächst

$$u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} > 0,$$
$$u''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0.$$

Andererseits ergeben sich aus u(x) durch positive monotone Transformationen die Funktionen

$$v(x) = (u(x))^2 = x$$

mit $v'(x) = 1 > 0,$
$v''(x) = 0$

und $w(x) = (u(x))^4 = x^2$

mit $w'(x) = 2x > 0\,,$

$w''(x) = 2 > 0\,.$

Die Vorzeichen der jeweiligen zweiten Ableitungen lassen sich also nicht zur Charakterisierung einer ordinalen Nutzenfunktion heranziehen.

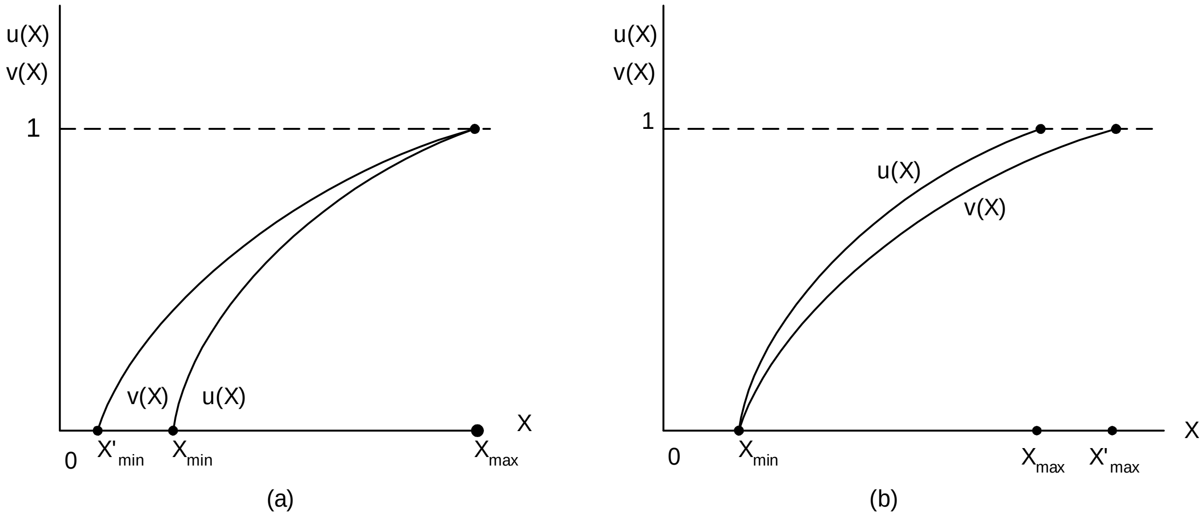
2) Somit folgt wegen der Annahme der Risikoaversion der Entscheidungsträger (d.h. u" < 0) im Rahmen des Erwartungs-nutzenkonzeptes:

"The implicit assumption on u"(X) hints that the utility function u(X) is not an ordinal utility function" (Gravelle and Rees, Seite 555).

5. Eindeutigkeit der Darstellung der Nutzenfunktion

1) Bezüglich der **Eindeutigkeit der Nutzenfunktion** u(X) ist zunächst festzuhalten, dass sie **nicht eindeutig** ist, da sie von den beiden Ergebnissen (Gewinnen) in einer Standard-Lotterie abhängig ist; das sind der am meisten und der am wenigstens präferierte (geschätzte) Gewinn X_{max} und X_{min}.

Zur Veranschaulichung diene die nachstehende Figur:



Figur 2

2) Es lässt sich zeigen, dass die Nutzenfunktion u(X) **eindeutig ist bis auf eine positive lineare Transformation**, d.h.

$$v(X) = a + b \cdot u(X) \text{ mit } b > 0$$

beschreibt die Klasse der zu u(X) "äquivalenten" Nutzenfunktionen v(X).

Hier gilt

$$v'(X) = b \cdot u'(X),$$
$$v''(X) = b \cdot u''(X),$$

woraus wegen b > 0 folgt

$$\text{sign}[v'(X)] = \text{sign}[u'(X)],$$
$$\text{sign}[v''(X)] = \text{sign}[u''(X)].$$

3) Es sei in Erinnerung gerufen:

Für die **ordinalen Nutzenfunktionen** u aus der Theorie der Konsumenten bei Sicherheit gilt **Eindeutigkeit bis auf positive monotone Transformation** (T mit T' > 0).

4) Zum **Nachweis** der Eindeutigkeit bis auf positive lineare Transformation von u(X):

Es seien die drei Gewinne X_1, X_2 und X_3 (z.B. in CHF) mit

$$X_1 < X_2 < X_3$$

gegeben. Ferner gelte für die Wahrscheinlichkeit p

$$X_2 \sim (p, 1-p\,;\, X_1,\, X_3) =: L,$$

d.h. der Entscheidungsträger sei indifferent zwischen dem sicheren Einkommen X_2 und der obigen Lotterie L.

Ferner seien u(X) und v(X) zwei adäquate Nutzenfunktionen. Dann gilt

$$u(X_2) = p \cdot u(X_1) + (1-p) \cdot u(X_3)$$

und

$$v(X_2) = p \cdot v(X_1) + (1-p) \cdot v(X_3).$$

Mit $u_i = u(X_i)$ und $v_i = v(X_i)$ für i = 1, 2, 3 folgt dann in Vektorschreibweise

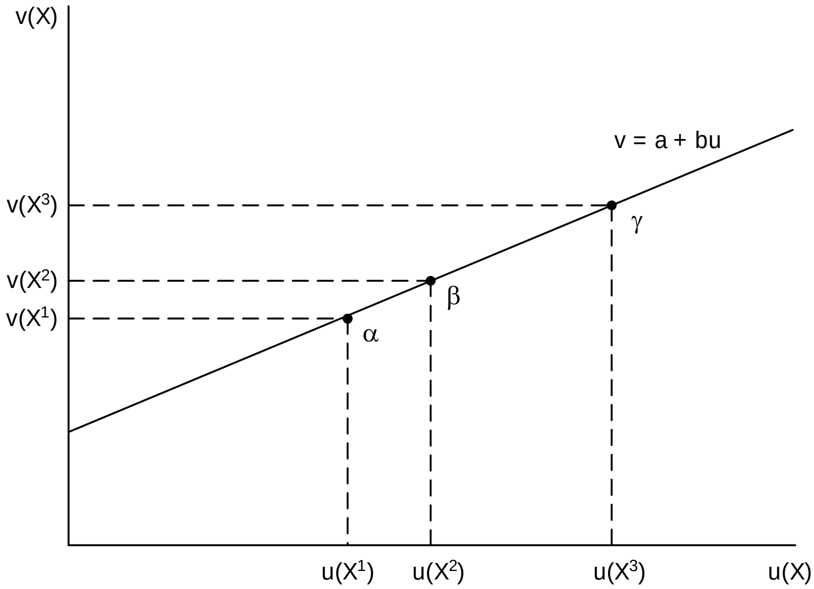
$$[u_2, v_2] = p \cdot [u_1, v_1] + (1-p) \cdot [u_3,\, v_3]$$

mit $0 \le p \le 1$.

D.h. der Vektor $[u_2,\, v_2]$ ergibt sich als Linearkombination der beiden Vektoren $[u_1, v_1]$ und $[u_3, v_3]$, er liegt also auf der Verbindungslinie von $[u_1,\, v_1]$ mit $[u_3,\, v_3]$.

Da dies für beliebige Einkommen X_1 und X_3 gilt, folgt, dass zwei zulässige Nutzenfunktionen u(X) und v(X) durch lineare Transformation miteinander verbunden sind.

Zur Veranschaulichung verweisen wir auf die nachstehende Grafik



Figur 3

5) Abschliessend schreiben Gravelle und Rees hierzu auf Seite 557:

"Possession of the property of uniqueness up to a positive linear transformation implies that the **utility function u(X*)* provides a cardinal rather than an ordinal measure of utility**, since this is the defining property of cardinal measures in general. Thus the von Neumann-Morgenstern axioms provide us with a measure of utility comparable to the commonly used measures of temperature - since the Fahrenheit and Centigrade scales are similarly related. If the theory holds, utility is cardinally measurable. However, it is important to stress that this does not mean that we have succeeded in 'measuring utility' as if utility were a physical magnitude in the same sense as weight or height. Nothing has been said about the 'amount' of intrinsic pleasure which the decision-taker receives from various amounts of income, and the word 'utility' as it is used here does not refer to this. The basis of the theory is still the ordering relation of preference or indifference, and the decision-taker's ability to compare and rank is the only aspect of his psychology in which we are interested. What we have shown is that if his ranking behavior satisfies a number of conditions of rationality and consistency, then he can be represented as acting as if he maximized the expected value of a numerical function which must therefore be cardinal. The word 'utility' is used, perhaps unfortunately, in describing this function, but nothing is implied about the measurability of sensations of pleasure of satisfaction."

Anhang (Ausführliche Herleitung; wird nicht vorgetragen)

6. Axiomatische Grundlagen für das Konzept "Erwartungsnutzen"

6.1. Grundbegriffe

1) Definition 1: Lotterie (Prospekt)
Eine Lotterie L besteht i.a. aus zwei n-Tupeln

$$L = (\vec{p}; \vec{X}) \text{ mit}$$

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_n),$$

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n).$$

Die p_i $(1 \le i \le n)$ sind die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Lotterie die Gewinne X_i $(1 \le i \le n)$ zur Auszahlung bringt.

Oft schreibt man auch

$$L = (p_1 X_1, \dots, p_i X_i, \dots, p_n X_n).$$

Hierbei wird implizit vorausgesetzt, dass die Gewinne der Lotterien reelle Zahlen sind, z.B. Geldzahlungen.

Für die p_i wird gefordert

$$p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

2) Für die **Gewinne** X_i **sei** $\succeq$ **eine Präferenzordnung**. Sie sei reflexiv, vollständig und transitiv.
D.h. es gilt für alle X_i, X_j und X_k :

(1) $X_i \succeq X_i$;

(2) $X_i \succeq X_j$ oder $X_j \succeq X_i$;

(3) wenn $X_i \succeq X_j$ und $X_j \succeq X_k$,

dann $X_i \succeq X_k$.

Die Relationen $\sim$ und $\succ$ führt man wie üblich ein, d.h. es gilt:

$$X_i \sim X_j \text{ gdw. } \quad X_i \succeq X_j \quad \text{und} \quad X_j \succeq X_i,$$

$$X_i \succ X_j \text{ gdw. } \quad X_i \succeq X_j \quad \text{und nicht } (X_i \sim X_j).$$

Dann folgt, dass die Relation $\sim$ transitiv und reflexiv ist und dass die Relation $\succ$ transitiv ist.

Falls die X_i Geldzahlungen wiedergeben, so lassen sich die Relationen $\succeq$, $\succ$ und $\sim$ als $\geq$, $>$ bzw. $=$ interpretieren und die obige Beziehungen sind erfüllt.

Es gelte

$$X_B := \underset{i,\,\succeq}{\mathrm{Max}}\ X_i \quad \text{und} \quad X_W := \underset{i,\,\succeq}{\mathrm{Min}}\ X_i$$

mit $X_B \succ X_W$.

D.h. mit X_B wird (einer) der Gewinn(e) bezeichnet, der am meisten präferiert wird, und mit X_W wird (einer) der Gewinn(e) bezeichnet, der am wenigsten geschätzt wird. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass X_B streng X_W vorgezogen wird; d.h. dass nicht alle Gewinne gleich eingeschätzt werden.

3) Definition 2: Standard-Lotterie

Als Standard-Lotterie wird bezeichnet

$$L_u := (u, 1-u\,;\ X_B, X_W)$$

mit $0 \leq u \leq 1$.

Als Kurzbezeichnung ist auch üblich

$$L_u = (u\,; X_B, X_W).$$

4) Definition 3: Zusammengesetzte Lotterien

Falls mindestens ein Gewinn einer Lotterie wieder eine Lotterie ist, so spricht man von einer zusammengesetzten Lotterie.

Im allgemeinen Fall definiert man also (für einstufig zusammengesetzte Lotterien)

$$L^Z := \left(q_1, \ldots, q_m; L^{(1)}, \ldots, L^{(m)}\right)$$

mit

$$L^{(j)} := \left(p_1^{(j)}, \ldots, p_n^{(j)}; X_1, \ldots, X_n\right)$$

für j=1, …, m.

5) Lotterien sind dadurch charakterisiert, dass mehrere Ergebnisse mit den ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten zusammengefasst werden. Man kann somit den **Erwartungswert der Ergebnisse der Lotterie** definieren. Dies setzt voraus, dass die Gewinne (Ergebnisse) der Lotterien reelle Zahlen sind, z.B. Geldzahlungen. Wir werden diesen Wert kurz als Erwartungswert der Lotterie bezeichnen.

Definition 4: Erwartungswert einer Lotterie

Gegeben sei die Lotterie L mit

$$L = (p_1, \ldots, p_n; X_1, \ldots, X_n).$$

Dann wird als Erwartungswert E[L] der Lotterie L definiert:

$$E[L] := \sum_{i=1}^{n} p_i \; X_i .$$

6.2. Die Axiome

1) Axiom 1: Reflexivität, Vollständigkeit und Transitivität

Für die **Menge der Lotterien** $\{L_1, L_2, ..\}$ **stellt** $\succeq$ **eine reflexive, vollständige und transitive Präferenzordnung** dar.

D.h. für jeweils drei Lotterien L_1, L_2 und L_3 gilt:

(1) $L_1 \succeq L_1$;

(2) $L_1 \succeq L_2$ oder $L_2 \succeq L_1$;

(3) wenn $L_1 \succeq L_2$ und $L_2 \succeq L_3$,

dann $L_1 \succeq L_3$.

Auch für die Präferenzordnung $\succeq$ der Lotterien führt man die Relationen $\sim$ und $\succ$ wie oben ein. Es folgt dann, dass die Relation $\sim$ transitiv und reflexiv ist und dass die Relation $\succ$ transitiv ist.

2) Axiom 2: Monotonie

Für je zwei beliebige Standard-Lotterien L_{u_1} und L_{u_2} gilt

$$L_{u_1} \succeq L_{u_2} \quad \text{gdw.} \quad u_1 \geq u_2 .$$

Analoges folgt dann für $\succ$ und > bzw. $\sim$ und =.

3) Axiom 3: Stetigkeit

Für alle Gewinne X_i existiert genau eine reelle Zahl $u(X_i)$, die eine Eintretenswahrscheinlichkeit wiedergibt, mit

$$u(X_i) \geq 0 \quad \text{und} \quad u(X_i) \leq 1 \text{ und}$$

$$X_i \sim (u(X_i); X_B, X_W) =: \tilde{X}_i$$

für i=1, …, n.

X_i ist hierbei als eine spezielle Lotterie zu interpretieren mit dem sicheren Gewinn X_i, d.h.

$$X_i = (p_1,\ldots, p_i,\ldots, p_n; X_1,\ldots, X_i,\ldots, X_n) =: L_{X_i}$$

mit $p_k = 0$ für $k = 1,\ldots,n$ und $k \neq i$,

$p_k = 1$ für $k = i$.

4) Die Lotterie $\tilde{X}_i = (u(X_i); X_B, X_W)$ wird auch als "**äquivalente Standard-Lotterie**" zu X_i bezeichnet.

Man beachte, dass das Individuum dieser Lotterie $\tilde{X}_i$ und dem sicheren Gewinn X_i gegenüber indifferent ist, da ja gilt

$X_i \sim \tilde{X}_i$.

Der sichere Gewinn X_i lässt sich als **"Sicherheitsäquivalent"** zur Lotterie $\tilde{X}_i$ interpretieren.

5) In Axiom 3 wird die Existenz einer Abbildung postuliert von der Menge der Gewinne $\{X_1, X_2,\ldots,X_n\}$ in die Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

$$u : \{X_1, X_2,\ldots,X_n\} \quad \rightarrow \quad [0,1]$$

und für

$$u_i := u(X_i)$$

gilt

$$X_i \sim (u_i \,;\, X_B, X_W).$$

Zur Motivation dieser Forderung vgl. die Ausführungen ab 5) in II.2.

(Bemerkung: Weiter unten wird die Umkehrbarkeit der Funktion u(X) auf der Menge der Gewinne gefordert. Für uns stellt sich die Frage, ob dafür nicht ein weiteres Axiom erforderlich wäre.)

6) Axiom 4: Reduktion von zusammengesetzten Lotterien; rationale Äquivalenz

Gegeben sei die zusammengesetzte Lotterie L^Z mit Gewinnen in Form von Standard-Lotterien:

$$L^Z = \left(q_1, \ldots, q_m \,;\, L^{(1)}, \ldots, L^{(m)}\right)$$

mit

$$L^{(j)} := \left(u_j, 1-u_j \,;\, X_B, X_w\right)$$

für j=1,…, m.

Dann gilt

$$L^Z \sim (\bar{u}, 1-\bar{u} \,;\, X_B, X_w) =: L_0^Z$$

mit

$$\bar{u} := q_1 u_1 + q_2 u_2 + \ldots + q_m u_m .$$

L_o^Z wird als **rationales Äquivalent** von L^Z bezeichnet; L_o^Z ist eine Standard-Lotterie.

7) Axiom 4 postuliert, dass man **vom "Spass am Spielen" abstrahiert**. Gravelle und Rees umschreiben das wie folgt:

"This axiom abstracts away all 'joy of gambling' ".

"A rational gambler is working out the final possible income positions and their associated probabilities…"
"… the compound prospect 'boils down' to thus simple prospect".

Bei der Bestimmung des rationalen Äquivalents "rechnet" man aus, mit welcher Wahrscheinlichkeit X_B bzw. X_W eintritt:

$$L^Z \to q_1 \text{ für } L^{(1)} \to u_1 \text{ für } X_B,$$

$$q_2 \text{ für } L^{(2)} \to u_2 \text{ für } X_B,$$

$$\vdots$$

$$q_m \text{ für } L^{(m)} \to u_m \text{ für } X_B.$$

Für die Wahrscheinlichkeit $\overline{u}$ für den Eintritt von X_B ergibt sich somit:

$$\overline{u} = q_1 u_1 + q_2 u_2 + ... + q_m u_m$$

Für die Wahrscheinlichkeit α für den Eintritt von X_W gilt dann:

$$\alpha = q_1 \cdot (1 - u_1) + q_2 \cdot (1 - u_2) + ... + q_m \cdot (1 - u_m).$$

$$= \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} q_j u_j$$

$$= 1 - \overline{u}.$$

Es gilt also

$$\overline{u} + \alpha = \overline{u} + 1 - \overline{u} = 1.$$

8) Axiom 5: Substituierbarkeit

In jeder Lotterie L kann der Gewinn X_i (i=1, …, n) durch die äquivalente Standard-Lotterie $\tilde{X}_i$ mit

$$X_i \sim \tilde{X}_i = (u_i ; X_B, X_W)$$

ersetzt werden, ohne dass die Präferenzen verändert werden, d.h. es gilt

$$L = (p_1, ..., p_i, ..., p_n ; X_1, ..., X_i, ..., X_n)$$

$$\sim (p_1, ..., p_i, ..., p_n ; X_1, ..., \tilde{X}_i, ..., X_n).$$

Hierbei gilt

$$u_i = u(X_i)$$

für i=1,…, n.

7. Erwartungsnutzen; Nutzenfunktion

1) Gegeben sei eine Menge von m beliebigen Lotterien $\left\{L^1,\ldots,L^m\right\}$ mit

$$L^j = \left(p_1^j,\ldots,p_n^j\ ;\ X_1,\ldots,X_n\right)$$

für j=1,…, m.

In jeder Lotterie L^j werden alle **Gewinne X_i** durch die **äquivalenten Standard-Lotterien** $\tilde{X}_i$ ersetzt. Man geht also für j=1,…, m über von L^j zu L_S^j mit

$$L_S^j := \left(p_1^j,\ldots,p_n^j\ ;\ \tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_n\right)$$

mit

$$\tilde{X}_i = \left(u_i\ ;\ X_B, X_W\right) \sim X_i \text{ und}$$

$$u_i = u(X_i)$$

für i = 1,…, n.

Es gilt dann

$$L^j \sim L_S^j .$$

Dies ist aufgrund der Axiome 3 und 5 möglich.

2) Die L_S^j sind jeweils zusammengesetzte Lotterien mit Gewinnen in Form von äquivalenten Standard-Lotterien.

"This is an important step, since it put the individual prospects on to a common basis of comparison - they become simply different ways of winning one or other of the same two outcomes" (Gravelle and Rees, Seite 547).

Gemäss Axiom 4 ist der Entscheidungsträger indifferent zwischen L_S^j und dem entsprechenden **rationalen Äquivalent** $L_{S,0}^j$, d.h.

$$L_S^j \sim L_{S,0}^j := \left(\bar{u}^j\ ;\ X_B, X_W\right)$$

mit

$$\overline{u}^j := \sum_{i=1}^{n} p_i^j u_i$$

für j=1,..., m.

Hierbei sei wieder

$$u_i = u(X_i) \quad \text{für } i=1,\ldots, n.$$

3) Aus Axiom 2 folgt nun

$$L^j_{S,0} \succ L^k_{S,0} \quad \text{gdw.} \quad \overline{u}^j > \overline{u}^k$$

und

$$L^j_{S,0} \sim L^k_{S,0} \quad \text{gdw.} \quad \overline{u}^j = \overline{u}^k$$

für $1 \leq j, k \leq m$.

"The preferred rational equivalent standard prospect will be that with the highest $\overline{u}$ value. Thus we can say, for purposes of the theory, that the decision-taker chooses among the prospects L^j_S in such a way as **to maximize the value of** $\overline{u}$, that is, he acts as if his intention is to make $\overline{u}$ as large as possible" (Gravelle and Rees, Seite 547).

4) Mit Hilfe Axiom 1 lässt sich wegen

$$L^j_{S,0} \sim L^j_S \sim L^j$$

für j=1,..., m diese Aussage über die Präferenzordnung auf die Ausgangslotterien L^j übertragen.

"It follows that **choice among these initial prospects** can be represented as the attempt by the **decision-taker to maximize** $\overline{\mathbf{u}}$**,** and we predict that if a prospect L^j is actually chosen, and if we were to carry out the measurements implied by the axioms of the theory, then we would find that it yielded the greatest value of $\overline{u}$" (Gravelle and Rees, Seite 547).

5) Wir haben somit **eine Funktion u von der Menge der Lotterien Λ in die Menge der reellen Zahlen**, die ≥ 0 und ≤ 1 sind;

also

$$u : \Lambda \to [0, 1]$$

mit $L \quad \mapsto \quad \overline{u}$
und $L' \succ L$ gdw. $\overline{u}' > \overline{u}$
und $L' \sim L$ gdw. $\overline{u}' = \overline{u}$,

wobei $L, L' \in \Lambda$ und $\overline{u} = u(L)$ und $\overline{u}' = u(L')$.

u wird als **Nutzenfunktion** bezeichnet.

"It is usual to call the function **u(X) a utility function**, **since it is a real-valued numerical representation of a preference ordering**. It should be clear from the way in which this function is derived that **"utility" is not to be interpreted as a quantity of satisfaction**, well-being or other psychic sensation concerned with ownership income, but simply as a name for the numbers which result when we carry out a series of paired comparisons" (Gravelle and Rees, Seite 548).

6) "Now, given a discrete probability distribution of some variable, say Z, we define the **expected value of this variable, $\overline{Z}$,** as:

$$\overline{Z} = \sum_{i=1}^{n} p_i Z_i$$

where p_i is the probability of occurrence of the value Z_i. It follows that we refer to the value

$$\overline{u}^j = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i^j$$

as the **expected utility of lottery L^j**, and we can interpret the axioms to mean that the **decision-taker chooses among prospects as if to maximize this expected utility**. For this reason, the theory based on these assumptions is often called the **expected utility theory of choice under uncertainty**" (Gravelle and Rees, Seite 548).

8. Eigenschaften der Nutzenfunktion

8.1. Grundlagen

1) Im folgenden beschränken wir uns auf Lotterien deren Gewinne X Einkommen oder Geldwerte darstellen und aus dem Intervall $[X_{min}, X_{max}]$ der reellen Zahlen IR entstammen.

Die Werte **X sind also reelle Zahlen** und die Relationen $\succeq$, $\succ$ bzw. $\sim$ für die Gewinne (Einkommen) können als $\geq$, $>$ bzw. $=$ interpretiert werden.

Ferner sei **u eine Nutzenfunktion** auf einer geeigneten Menge Λ von Lotterien mit

$$u : \Lambda \quad \to \quad [0, 1].$$

Für u gelten die am Ende des vorigen Abschnittes angegebenen Eigenschaften.

2) Einerseits betrachten wir **u als Funktion auf Λ und** andererseits **als Funktion auf den Einkommen aus dem Intervall** $[X_{min}, X_{max}]$. Dies wird dadurch möglich, dass man jedes Einkommen $X \in [X_{min}, X_{max}]$ als Lotterie mit dem sicheren Gewinn X darstellen kann. Wir können somit u auch als Funktion von der Menge der Einkommen X in das Einheitsintervall interpretieren:

$$u : \{X | X_{min} \leq X \leq X_{max}\} \to [0,1]$$

mit $X \mapsto u(X) \in [0,1]$.

Für u(X) als Nutzenfunktion von Einkommen $X \in [X_{min}, X_{max}]$ gelten folgende Eigenschaften:

(1) u(X) steigt mit steigendem Einkommen X.

(2) Es gilt $0 \leq u(X) \leq 1$.

(3) u(X) ist "eindeutig" definiert relativ zu den Werten X_{min} und X_{max}.

Die Gültigkeit von (1) ergibt sich direkt aus den obigen Axiomen.

Zusätzlich wird **angenommen**, dass die Nutzenfunktion u **zweimal differenzierbar** ist.

Für u(X) als Nutzenfunktion vom Einkommen gilt also:

$$u\ :\{X|X\ \text{Einkommen};\ X_{min} \leq X \leq X_{max}\} \to [0,1],$$

u'(X) > 0 positiver Grenznutzen des Einkommens.

u"(X) Veränderung des Grenznutzens des Einkommens bei steigendem Einkommen.

(Bemerkung: Die Annahme $u'(X) > 0$ garantiert die Umkehrbarkeit der Funktion u(X), ohne dass das für uns direkt aus den Axiomen aus Abschnitt 3.2. ableitbar ist. Aus Axiom 3 (Stetigkeit) folgt für uns nur die Existenz einer Abbildung von der Menge der Gewinne $[X_{min}, X_{max}]$ in das Einheitsintervall $[0,1] \subset IR$, nicht jedoch die Umkehrbarkeit dieser Funktion.)

Nun lässt sich mittels der Nutzenfunktion u(X) das Verhalten des Entscheidungsträgers der Unsicherheit gegenüber beschreiben.

3) Gegeben sei folgende Lotterie L

$$L = (p, 1-p;\ X_1,\ X_2).$$

Als **Erwartungswert der Lotterie L** ergibt sich

$$\overline{X} := pX_1 + (1-p)\ X_2 (= E[L]).$$

4) Als **Sicherheitsäquivalent der Lotterie L** wird das sichere Einkommen $\tilde{X}$ definiert, für das

$$\tilde{X} \sim L$$

gilt. Dieses Einkommen kann man als eine Lotterie mit dem sicheren Gewinn in Höhe des Einkommens $\tilde{X}$ interpretieren.

5) Es ist nun aufzuzeigen, unter welchen Voraussetzungen ein solches Sicherheitsäquivalent $\tilde{X}$ existiert.

Zunächst geht man von der Lotterie L über zur Lotterie L_S mit

$$L_S \sim L,$$

$$L_S := (p, 1-p\,;\,(u_1\,;\,X_{max}, X_{min}), (u_2\,;\,X_{max}, X_{min})),$$

$$X_i \sim (u_i\,;\,X_{max}, X_{min})\ i = 1, 2,$$

$$u_i := u(X_i) \quad i = 1, 2.$$

Dies ist möglich aufgrund des Stetigkeitsaxioms 3 und des Substituierbarkeitsaxioms 5.

Aufgrund der rationalen Äquivalenz (Axiom 4) gilt weiter

$$L_S \sim (\bar{u}\,;\,X_{max}, X_{min}) =: L_{S,0}$$

mit $\bar{u} := p\,u_1 + (1-p)u_2$.

Der Nutzen von $L_{S,0}$ kann wegen Axiom 2 mit $\bar{u}$ identifiziert werden.

Wegen der Äquivalenzkette $L \sim L_S \sim L_{S,0}$ gilt also

$$u(L) = u(L_S)$$

$$= u(L_{S,0})$$

$$= p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2).$$

Da u als Funktion der Einkommen X im Intervall einmal differenzierbar und streng monoton steigend ist $(u'(X) > 0)$, existiert genau ein $\tilde{X} \in [X_{min}, X_{max}]$ mit

$$u(\tilde{X}) = p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2).$$

Begründung: Durch u wird wegen u'(X) > 0 das Intervall $[X_1, X_2]$ auf das Intervall $[u(X_1), u(X_2)]$ derart abgebildet, dass $X' < X''$ gdw. $u(X') < u(X'')$ gilt. Wegen $0 \le p \le 1$ ist $p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2)$ ein Punkt aus dem Intervall $[u(X_1), u(X_2)]$. Da $u(X)$ wegen $u'(X) > 0$ umkehrbar ist, existiert genau $\tilde{X} \in [X_1, X_2]$ mit

$$\tilde{X} := u^{-1}(p\,u(X_1) + (1-p)\,u(X_2)),$$

also mit

$$u(\tilde{X}) = p\, u(X_1) + (1-p)\, u(X_2)\,.$$

Die Umkehrbarkeit von u gilt nur für u als Funktion der Einkommen X in das Einheitsintervall.

Also gilt

$$u(\tilde{X}) = u(L)$$

und somit

$$\tilde{X} \sim L.$$

Das sichere Einkommen $\tilde{X}$ wird gleich eingeschätzt wie die Lotterie L.

6) Man vergleicht nun das Sicherheitsäquivalent $\tilde{X}$ mit dem Erwartungswert $\bar{X}$.

Abstrakt läst sich das dahingehend interpretieren, dass man zwei Funktionen von der Menge Λ der Lotterien in das Intervall $[X_{min}, X_{max}] \subset \mathrm{IR}$ vergleicht:

$$L \mapsto E[L] = \bar{X} = pX_1 + (1-p)X_2\,,$$

$$L \mapsto u(L) \mapsto \tilde{X}\,.$$

Hierbei ist $\tilde{X}$ das Sicherheitsäquivalent zur Lotterie L, d.h. $\tilde{X}$ wird als Lotterie mit dem sicheren Einkommen $\tilde{X}$ interpretiert, und es gilt $u(L) = u(\tilde{X})$.

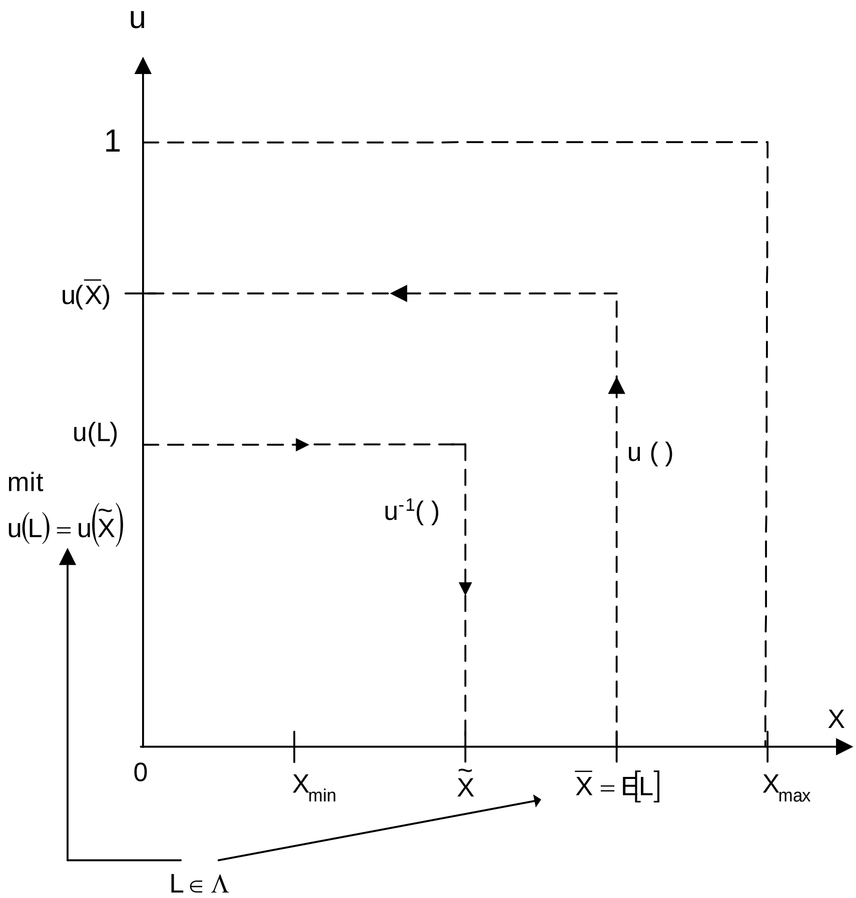
Mit umkehrbarem u kann man auch schreiben

$$u^{-1}(u(L)) = u^{-1}\left(u(\tilde{X})\right)$$

$$= \tilde{X}\,.$$

u als Funktion auf dem Einkommen X ist nach den obigen Differenzierbarkeitsannahmen umkehrbar. Unter u^{-1} wird hier also eine Funktion vom Intervall [0, 1] in die Menge der Einkommen X im Intervall $[X_{min}, X_{max}]$ verstanden und nicht in die Menge Λ der Lotterien.

Grafisch lässt sich das wie folgt veranschaulichen:



L sei eine beliebige Lotterie aus Λ
(Beispiel: L = (p, 1-p ; X_1, X_2)

$\overline{X} = E[L]$ ist der **Erwartungswert der Lotterie L**; das ist ein
Einkommen (Beispiel: $E[L] = p \cdot X_1 + (1-p) \cdot X_2$)

$u(\overline{X}) = u(E[L])$ ist der **Nutzen des Erwartungswertes der Lotterie L**

$u(L)$ ist der **Erwartungsnutzen der Lotterie L**
(Beispiel: $u(L) = p \cdot u(X_1) + (1-p) \cdot u(X_2)$)

$\tilde{X}$ ist als sicheres Einkommen das **Sicherheitsäquivalent zur Lotterie L**, also gilt $u(L) = u(\tilde{X})$.

u( ) wird

- einerseits als Funktion von der Menge Λ der Lotterien in das Einheitsintervall aufgefasst

und

- andererseits als Funktion von der Menge der Einkommen X mit $X_{min} \leq X \leq X_{max}$ in das Einheitsintervall; diese Einkommen werden hier als spezielle Lottereien aufgefasst mit dem sicheren Gewinn gerade in Höhe des Einkommens.

$u^{-1}(\ )$ als Umkehrfunktion von u( ) wird lediglich betrachtet für die
Funktion u( ) von den Einkommen in das Einheitsintervall, also
$u^{-1} : \{z \mid u(X_{min}) \leq z \leq u(X_{max})\} \rightarrow [X_{min}, X_{max}]$

Die Lage von $\tilde{X}$ in Relation $\bar{X}$ hängt von der konkreten Form der Funktion u ab.

7) Zur weiteren Verdeutlichung betrachten wir das folgende **Beispiel**:

Es werde eine faire Münze geworfen. Falls Kopf oben aufliegt, erhält man 6 SFR und falls Adler oben aufliegt, muss man 4 SFR zahlen.

Das ursprüngliche Einkommen sei X. Der Spieler muss sich entscheiden, ob er an dem Spiel teilnimmt oder nicht. Falls er spielt, so wählt er folgende Lotterie

$$L_1 = (0.5, 0.5; X + 6, X - 4).$$

Falls er nicht spielt, so wählt er

$$L_2 = (1, 0 ; X, X).$$

Für die Erwartungswerte der Lotterien gilt

$$E[L_1] = 0.5(X + 6) + 0.5(X - 4)$$

$$= X+1,$$

$$E[L_2] = 1 \cdot X + 0 \cdot X$$

$$= X.$$

8) Wir treffen folgende **Fallunterscheidung** bzgl. des Vergleichs zwischen Erwartungswert und Sicherheitsäquivalent:

a) $\tilde{X} = \bar{X}$

Das sicherheitsäquivalente Einkommen sei also gleich dem Erwartungswert der Lotterie.

Hier folgt

$X+1>X$ gdw. $E[L_1]>E[L_2]$, da $X+1=E[L_1]$ und $X=E[L_2]$;

gdw. $\tilde{X}_{L_1}>\tilde{X}_{L_2}$, da $\tilde{X}_{L_i}=E[L_i]$ wegen der Annahme von Fall a) $\tilde{X}_{L_i}=\bar{X}_{L_i}$;

gdw. $L_1 \succ L_2$, da $u\left(\tilde{X}_{L_i}\right)=u\left(L_i\right)$

Also gilt:
Lotterie L_1 wird der Lotterie L_2 vorgezogen, d.h. der Entscheidungsträger entscheidet sich für das Spiel (die Lotterie) L_1.

Er wird sogar bereit sein, dafür zu bezahlen; und zwar bis zu 1 SFR.

In a) gilt also

$$\begin{aligned} u(L) &= p\,u(X_1)+(1-p)\,u(X_2) \\ &= u(\tilde{X}) \\ &= u(\bar{X}) \\ &= u(pX_1+(1-p)\,X_2). \end{aligned}$$

Eine **Präferenzordnung für Lotterien kann hier auf den Erwartungswerten der Lotterien aufgebaut** werden mit der Massgabe, dass höhere Erwartungswerte vorgezogen werden. Man spricht von **Risikoneutralität** (risk neutral).

b) $\tilde{X}<\bar{X}$

Hier schätzt der Entscheidungsträger die Lotterie geringer ein als den Erwartungswert derselben.

Hier gilt:

$$\begin{aligned} u(L) &= p\,u(X_1)+(1-p)\,u(X_2) \\ &= u(\tilde{X}) \\ &< u(\bar{X}) \\ &= u(pX_1+(1-p)\,X_2). \end{aligned}$$

Hier kann eine Präferenzordnung für Lotterien nicht auf den Erwartungswerten derselben aufgebaut werden, da der Nutzen der Erwartungswerte der Lotterien grösser ist als der Erwartungsnutzen der Lotterien.

Man spricht von **Risikoaversion** (risk-aversion).

c) $\tilde{X} > \bar{X}$

Hier schätzt der Entscheidungsträger den Nutzen der Lotterie höher ein als den Erwartungswert derselben.

Im Beispiel wird er die Lotterie L_1 annehmen und bereit sein mehr als 1 SFR zu bezahlen.

Hier gilt:

$$\begin{aligned} u(L) &= p\, u(X_1) + (1-p)\, u(X_2) \\ &= u(\tilde{X}) \\ &> u(\bar{X}) \\ &= u(pX_1 + (1-p)\, X_2). \end{aligned}$$

Auch hier kann eine Präferenzordnung für Lotterien nicht auf den Erwartungswerten derselben aufgebaut werden, da der Nutzen der Erwartungswerte der Lotterien kleiner ist als der Erwartungsnutzen der Lotterien.

Man spricht von **Risikofreudigkeit** (risk-attracted).

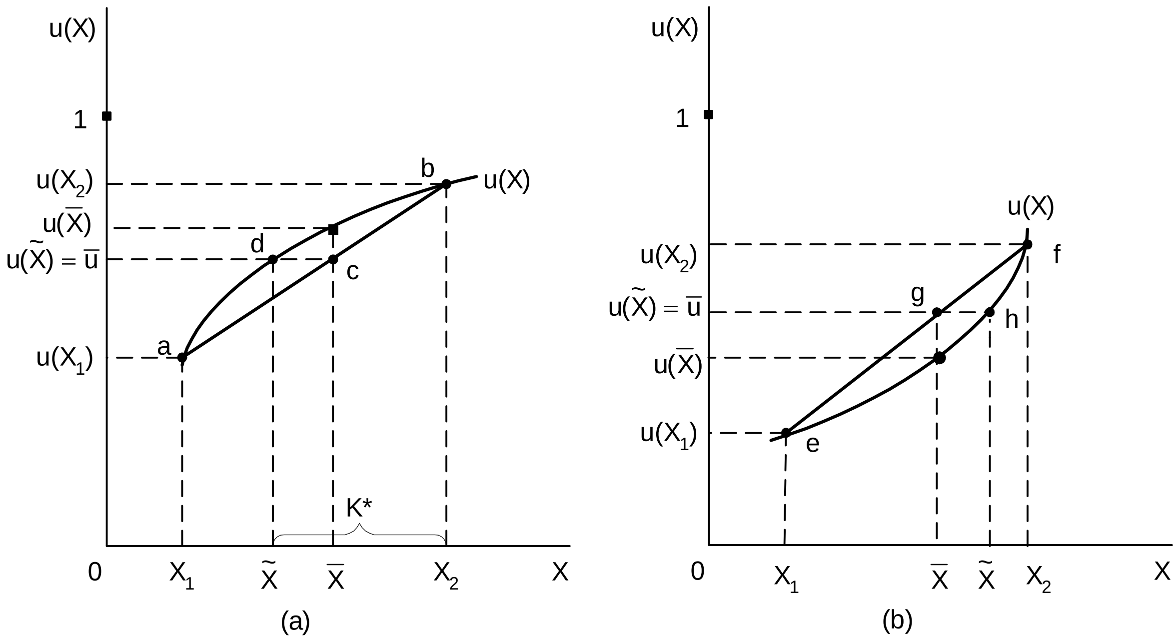
8.2. Grafische Darstellung der Nutzenfunktion

1) Bezüglich der grafischen Darstellung der Nutzenfunktionen gilt folgendes:

a) Risikoaversion korrespondiert mit einer strikt konkaven Nutzenfunktion, d.h. u" < 0.

b) Risikofreudigkeit korrespondiert mit einer strikt konvexen Nutzenfunktion, d.h. u" > 0.

c) Risikoneutralität korrespondiert mit einer linearen Nutzenfunktion, d.h. u" = 0.



Figur 1

In den obigen Grafiken gilt für die Lotterie :

$$E[L] = \overline{X},$$

$$u(L) = \overline{u} \text{ mit } u(L) = u(\tilde{X}),$$

$$u^{-1}(\overline{u}) = u^{-1}(u(\tilde{X})) = \tilde{X}.$$

2) In Figur 1(a) ist die Nutzenfunktion u(X) strikt konkav. Es liegt also **Risikoaversion** vor.

Gegeben seien die beiden Einkommen X_1, X_2, die beiden Nutzenindizes $u(X_1)$, $u(X_2)$ und damit die beiden Punkte a und b auf der Nutzenfunktion u(X).

Ferner sei die Wahrscheinlichkeit p gegeben.

Wir betrachten die Lotterie

$$L = (p, 1-p\,;\, X_1, X_2)\ .$$

Für den **Erwartungswert der Lotterie** ergibt sich

$$E[L] = \overline{X} = p\, X_1 + (1-p)\, X_2 .$$

Für den **Erwartungsnutzen der Lotterie** gilt

$$u(L) = \overline{u}$$
$$= p\, u(X_1) + (1-p)\, u(X_2).$$

3) Es gilt:

Die Punkte auf der Geraden $\overline{ab}$ entsprechen den Tupeln **(Erwartungswert der Lotterie, Erwartungsnutzen der Lotterie)** bzw. $(\overline{X}, \overline{u})$.

Dies ergibt sich wie folgt:

Die Gerade $\overline{ab}$ hat die Steigung

$$\frac{u(X_2) - u(X_1)}{X_2 - X_1}$$

und geht durch den Punkt

$(X_1, u(X_1))$.

Sie lässt sich also darstellen als

$$f(X) = u(X_1) + \frac{u(X_2) - u(X_1)}{X_2 - X_1}\,(X - X_1).$$

Für $\overline{X} = pX_1 + (1-p)X_2$ gilt also

$$f(\overline{X}) = u(X_1) + \frac{u(X_2) - u(X_1)}{X_2 - X_1}\,(pX_1 + (1-p)\,X_2 - X_1)$$

$$= u(X_1) + \frac{u(X_2) - u(X_1)}{X_2 - X_1}\,(1-p)\,(X_2 - X_1)$$

$$= u(X_1) + (u(X_2) - u(X_1))\,(1-p)$$

$$= p\, u(X_1) + (1-p)\, u(X_2)$$

$$= \overline{u}$$

$$= u(L).$$

In Figur 1(a) hat der Punkt c die Koordinaten $(\overline{X}, \overline{u})$.

4) Das sicherheitsäquivalente Einkommen $\tilde{X}$ zu der Lotterie L wird definiert durch

$$u(\tilde{X}) = u(L)$$

$$= \bar{u}$$

bzw. $\tilde{X} := u^{-1}(\bar{u})$.

In Figur 1(a) hat der Punkt d die Koordinaten

$$\left(u^{-1}(\bar{u}), \bar{u}\right) = \left(u^{-1}\left(u(\tilde{X})\right), u(\tilde{X})\right) = \left(\tilde{X}, u(\tilde{X})\right) = \left(\tilde{X}, \bar{u}\right)$$

= **(Sicherheitsäquivalent, Erwartungsnutzen)**

Wegen der strikten Konkavität von u und $u(\tilde{X}) = \bar{u}$ gilt

$$\tilde{X} < \bar{X}.$$

5) In Figur 1(b) wird der Fall der **Risikofreudigkeit** dargestellt. Es gelten die zu 4) analogen Aussagen mit den entsprechenden Anpassungen.

6) Bei **Risikoneutralität** ist die Funktion u(X) identisch mit der Geraden $\overline{ab}$. Die Nutzenfunktion ist hier linear, und es gilt

$$\bar{u} = u(\bar{X})$$

und $\bar{X} = \tilde{X}$.

7) Für die Nutzenfunktion gilt also:

$$u : \{X \mid X \text{ Einkommen}; X_{Min} \le X \le X_{Max}\} \to [0, 1],$$

u'(X) > 0,

$$u''(X) \begin{cases} < 0 \text{ für Risikoaversion,} \\ = 0 \text{ für Risikoneutralität,} \\ > 0 \text{ für Risikofreudigkeit.} \end{cases}$$