

Versicherungsökonomik

Früher: BWL der Versicherung

Teil II

Frühjahrssemester 2012

ETH Zürich

Universität Zürich

Dr. Ruprecht Witzel

ruprecht.witzel@aktuariat-witzel.ch

www.aktuariat-witzel.ch

I. EINFÜHRUNG	3
1. Überblick	3
1.1. Einordnung	3
1.1.1. Rechtswissenschaft	4
1.1.2. Mathematik	8
1.1.3. Wirtschaftswissenschaften	8
1.1.4. Konsequenzen	10
1.1.5. Bedeutung der Sachverständigen	10
1.2. Aufgabengebiet	10
1.3. Vorgesehene Themengebiete dieser Vorlesung	11
2. Charakteristika des Produktes Versicherung	15
2.1. Umgangssprachliche Begriffe bzgl. Versicherung und Risiko	15
2.1.1. Brockhaus Enzyklopädie	15
2.1.2. Versicherungstechnische Literatur	16
2.1.3. Zum Umgang mit Risiken	18
2.2. Mathematische Grundbegriffe bzgl. Risiko	20
2.2.1. Verbale Einführung	20
2.2.2. Deterministische Experimente - Zufallsexperimente	21
2.2.3. Relative Häufigkeit	22
2.2.4. Parameter von Zufallsvariablen	24
2.2.5. Quantifizierung des Risikos	26
2.3. Das Produkt "Versicherung"	30
2.3.1. Risiko-Komponente	30
2.3.2. Spar-Komponente	33
2.3.3. Dienstleistungs-Komponente	34
2.4. Die Versicherungsprämie	36
2.4.1. Grundlagen	36
2.4.2. Bemerkungen zur Risikoprämie	36
3. Elemente der Theorie des Konsumenten	39
3.1. Die Präferenzordnung	39
3.2. Die Nutzenfunktion	44
3.3. Die Budgetrestriktion	48
3.4. Die Konsumententscheidung	49

I. EINFÜHRUNG

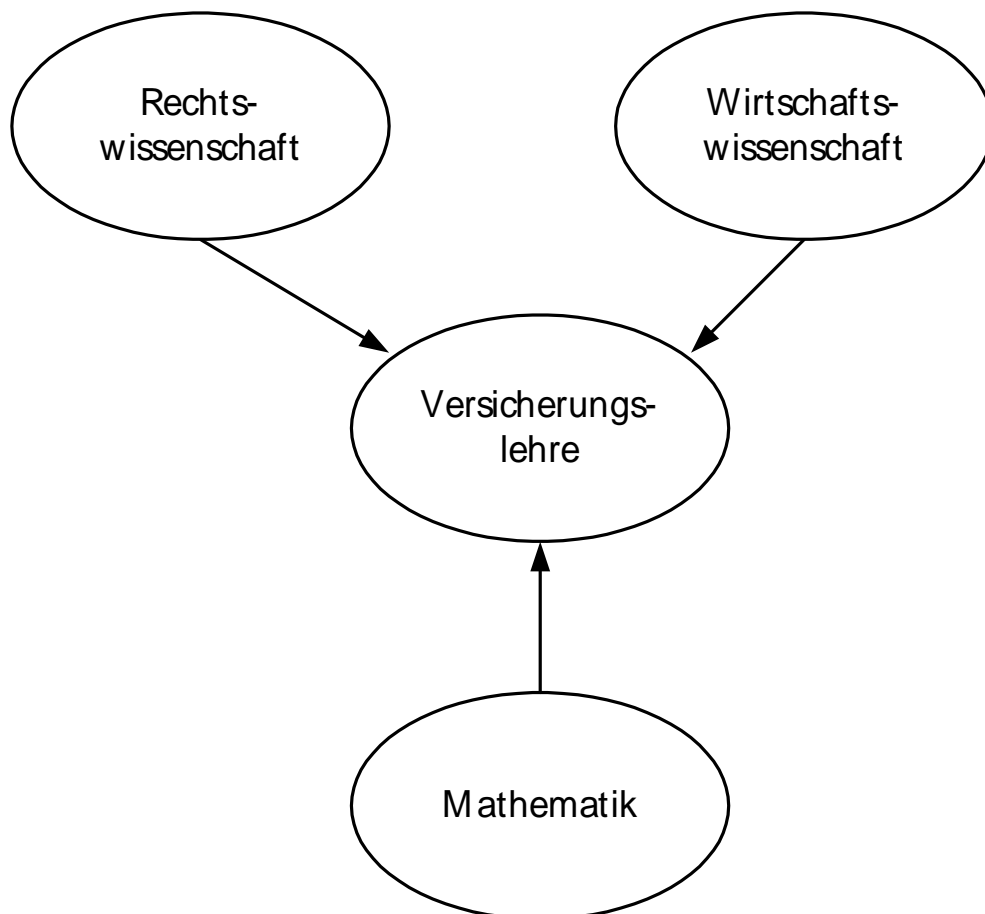
1. Überblick

1.1. Einordnung

Die Versicherungslehre ist im Spannungsfeld zwischen

- **Mathematik**
- **Rechtswissenschaft**
- **Wirtschaftswissenschaft**

einzuordnen.



1.1.1. Rechtswissenschaft

Bezüglich der Rechtswissenschaft lassen sich die beiden folgenden Aspekte unterscheiden:

- rechtliche Rahmenbedingungen,
- Gestaltung der Versicherungsverträge.

1) Rechtliche Rahmenbedingungen

Der **Einfluss des Staates** auf das Versicherungsgeschehen ist bis zu Beginn der Deregulierungstendenzen im Zusammenhang mit der Realisierung des europäischen Binnenmarktes in den 90er Jahren des 20. Jahrhunderts in den meisten europäischen Ländern **sehr gross gewesen**. Einerseits hat der Gesetzgeber durch eine **enorme Regelungsdichte** den **unternehmerischen Spielraum** für die Versicherungsgesellschaften **bewusst stark eingeschränkt**. Andererseits hat er der Versicherungswirtschaft durch **Versicherungszwang bzw. Vergünstigungen** ein **grosses Betätigungsfeld** eröffnet.

In den meisten europäischen Ländern ist eine **erste Phase der Deregulierung der Versicherungsmärkte abgeschlossen**.

In der **Schweiz** gilt das nur für den **Nicht-Lebensversicherungsmarkt und die Einzel-Lebensversicherung**; für die **Kollektiv-Lebensversicherung** im Sinne der beruflichen Vorsorge (BVG) und für die **Krankenversicherung** ist die Deregulierung nicht eingeführt worden. Obwohl die Schweiz weder in der EU noch im EWR ist, orientiert sie sich bzgl. der rechtlichen Rahmenbedingungen völlig nach den Vorgaben der EU, um ihre Versicherungsindustrie – soweit es geht – am europäischen Binnenmarkt teilhaben zu lassen.

In den **USA** und **England** sind beispielsweise nach einer langen Phase der **Deregulierung** Tendenzen zur **Reregulierung** festzustellen, wobei jedoch zu beachten ist, dass von den neuen Regulierungen andere Bereiche - vornehmlich auf dem Gebiet der Kapitalanlagen, der Solvabilität und des Vertriebes - betroffen sind als von den früheren Regulierungsvorschriften.

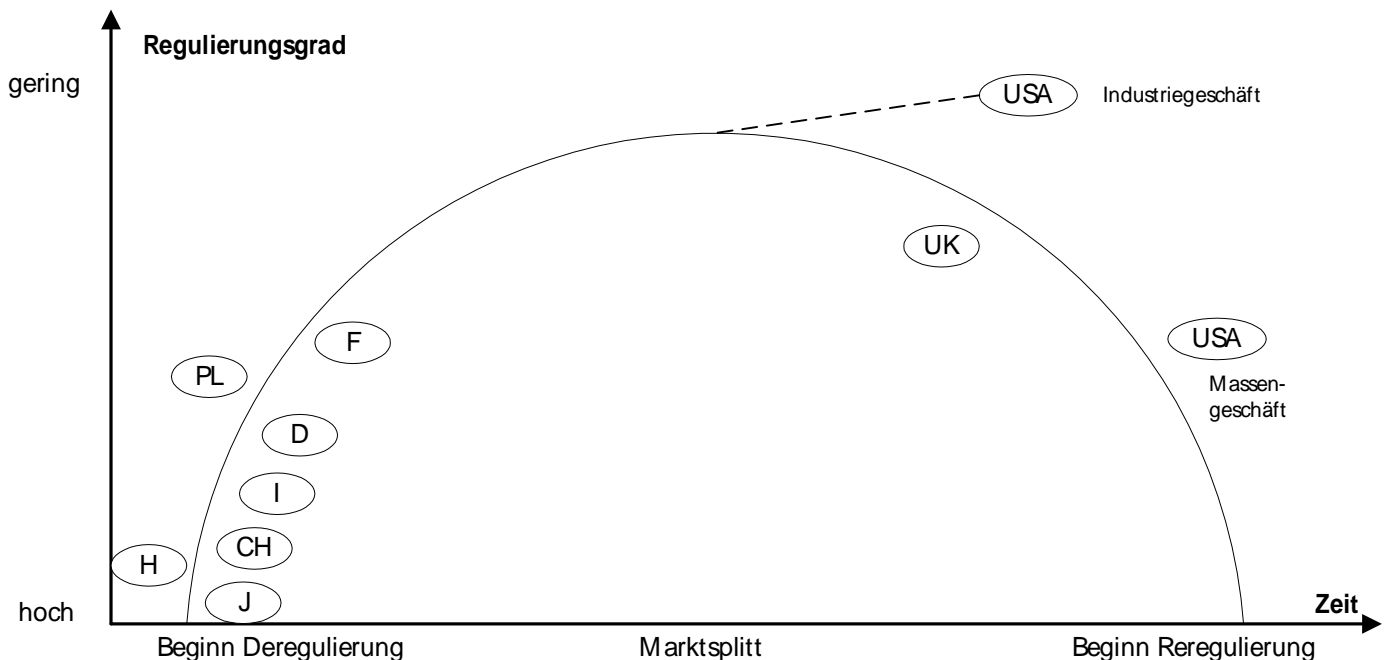
Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes zitieren wir aus dem Heft Experiodica Nr. 3/95 der Schweizer Rück:

"Verlaufen Deregulierung und Reregulierung zyklisch?

Unter Berücksichtigung der Zeitachse legen die Elemente der markt-spezifischen Ordnungssysteme die These nahe, dass die einzelnen Länder zwar von einer unterschiedlichen Ausgangslage gestartet sind, sich heute in verschiedenen Deregulierungsphasen befinden, grund-

sätzlich aber alle denselben De(Re)regulierungsprozess durchlaufen, wie er in Abbildung 1 schematisch skizziert ist.

Schematische Darstellung des Deregulierungszyklus mit seinen typischen Phasen



In den meisten europäischen Versicherungsmärkten führte die **Deregulierung zu einer deutlichen Intensivierung des Wettbewerbes**; dies gilt **auch für den Schweizer Markt**.

Sogar in Japan, dem bis heute noch immer am stärksten regulierten Markt, wird - unter internationalem Druck von Seiten der World Trade Organization (WTO) - über einen "kontrollierten Abbau" von Marktzutrittschranken diskutiert. **Regulierungstendenzen** kann man in den **USA** beobachten: hier ist ein "**Aufsichtssplit**" zwischen den "**Commercial Lines**" und den "**Personal Lines**" zu beobachten, wobei sich die einzelstaatlichen Aufsichtsbestimmungen im Bereich des Massengeschäfts in Richtung restriktiverer Standards angleichen. In **Grossbritannien** hat eine partielle Reregulierung mit neuen Instrumenten bereits stattgefunden; sie kommt beispielsweise in strengeren Ausbildungsvorschriften für Verkaufspersonal von Versicherungsdienstleistungen zum Ausdruck. Ähnliches zeichnet sich auch in der Schweiz ab.

Aufgrund der Entwicklung der letzten Jahre ist die erste Euphorie über die Deregulierung und die grösseren Freiräume verfliegen. Der **faktische Zusammenbruch der Equitable Life in England und der Mannheimer in Deutschland lässt Zweifel** an den derzeit gültigen

EU- Solvenzvorschriften – dem Kernstück des neuen Aufsichtssystem - aufkommen. Im Rahmen des EU-Projektes "Solvency II" werden neue Solvenzregeln in Anlehnung an Basel II für Banken diskutiert. Es war geplant, diese Änderungen in 2011 einzuführen; allerdings verzögert sich die definitive Einführung. Es wird eine Koordination mit der neuen Version des Rechnungslegungsstandards gemäss IFRS angestrebt.

Per 1.1.2004 hat die EU marginale Änderungen der Solvenzregelungen erlassen. Das BPV hat diese für die Schweiz übernommen und zusätzlich zwei Verschärfungen eingeführt. So ist ab 2004 der Solvenznachweis quartalsweise zu erbringen und bezüglich der Anrechenbarkeit der stillen Reserven auf börsenkotierten Wertpapieren gab es schrittweise Verschärfungen.

Im Jahr 2006 sind die neuen Versionen des Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG) und der Aufsichtsverordnung (AVO) in Kraft getreten. Hierdurch ergibt sich eine grundlegende Änderung der rechtlichen Rahmenbedingungen für den Schweizer Versicherungsmarkt. So ist z. B. ab 2006 der so genannte **Schweizer Solvenz Test (SST)** von allen in der Schweiz tätigen Versicherungsunternehmen zu Informationszwecken zu berechnen; bis zum Berichtsjahr 2009 waren jedoch allein die EU-Solvvenzvorschriften relevant. Ab dem Berichtsjahr 2010 richtet sich das Solvenzerfordernis in der Schweiz nach dem SST.

2) Gestaltung der Versicherungsverträge

Das zweite Einflussgebiet der Rechtswissenschaften auf das Versicherungsgeschehen manifestiert sich in der **Gestaltung der Versicherungsverträge** und der dazugehörigen Materialien **wie Policen, Allgemeine Versicherungsbedingungen (AVB)** etc. Hier wird der Versuch unternommen, mit der (Normal-) Sprache ein juristisch konsistentes Modell des Produktes Versicherung zu erstellen. So ist beispielsweise festzulegen:

- was versichert ist,
 - wie die Versicherungsleistungen definiert werden,
 - wie hoch der Preis, d.h. die Prämie ist,
 - wann ein Schaden vorliegt,
 - wie die Schadenhöhe definiert wird,
- etc.

Die rechtlichen Rahmenbedingungen auf diesem Gebiet werden durch das **Versicherungsvertragsgesetz (VVG)** gegeben. Per 1. 1. 2006 ist

eine Teilrevision in Kraft gesetzt worden; an einer Totalrevision analog zum VAG wird noch gearbeitet.

1.1.2. Mathematik

Auch bei der Mathematik unterscheiden wir zwei Einflussbereiche:

- Statistische Grundlagen,
- Formulierung mathematischer Modelle bzgl. des Produktes Versicherung.

1) Statistische Grundlagen

Wie wir sehen werden, ist eine ganz wesentliche Technik zur Herstellung des Produktes Versicherung die Realisierung von statistischen Ausgleichseffekten oder dergleichen. Man versucht, **Einzelphänomene in Massenphänomene zu transformieren**. Hierzu bildet man nach Möglichkeit grosse Gesamtheiten von versicherten Risiken, so dass mittels statistischer Methoden gewisse **Aussagen über das Verhalten relevanter Zufallsvariablen** möglich werden. Hiermit werden die statistischen Grundlagen bereitgestellt, die in den konkreten versicherungsmathematischen Modellen genutzt werden.

2) Mathematische Modelle

Um die oben angesprochenen Massenphänomene adäquat beschreiben zu können, bedient man sich der Mathematik als Sprache (Man vergleiche hierzu das Motto in den "Foundations of Economics" von Paul S. Samuelson: "**Mathematic is a language**").

Die **Mathematik** wird also **als Sprache** benutzt, um das **Produkt Versicherung formelmässig exakt zu beschreiben**. Hierzu müssen zunächst bestimmte Annahmen getroffen und mathematisch formuliert werden. Anschliessend werden die **Preis-Leistungsverhältnisse** bestimmt. Schliesslich sind die **technischen Rückstellungen** zu definieren und zu berechnen, um die zukünftigen Verpflichtungen den Versicherungsnehmern gegenüber adäquat zu bewerten.

Wir halten fest, dass somit eine zweite modellmässige Beschreibung des Produktes Versicherung vorliegt; jedoch in einer "anderen Sprache".

1.1.3. Wirtschaftswissenschaften

Bei dem wirtschaftswissenschaftlichen Einfluss auf die Versicherungslehre sind zu unterscheiden:

- die volkswirtschaftlichen Aspekte und
- die betriebswirtschaftlichen Aspekte.

1) Volkswirtschaftliche Aspekte

Bei den volkswirtschaftlichen Aspekten stehen die **marktbezogenen** und **gesamtwirtschaftlichen Gesichtspunkte** im Vordergrund. Zunächst verweisen wir auf die Tatsache, dass durch den **Risikotransfer** aufgrund von Versicherungen viele Transaktionen in unserer **arbeits-teiligen Wirtschaft** erst ermöglicht werden. Ein solcher Risikotransfer findet nur statt, wenn vorgängig ein adäquater Preis für die Risiken gefunden wird. In diesem Zusammenhang seien auch die theoretischen Überlegungen zu den **Bestimmungsgründen der Nachfrage und des Angebots von Versicherungen** sowie deren Preisbestimmung erwähnt. Schliesslich verweisen wir noch auf die Bedeutung der Versicherungsunternehmungen als institutioneller Kapitalanleger, Arbeitgeber und dergleichen.

2) Betriebswirtschaftliche Aspekte

Unter die betriebswirtschaftlichen Aspekte wollen wir Themenkomplexe subsumieren:

- Eine verbale, **ökonomisch geprägte Modellierung** des Produktes Versicherung oder von Teilen davon. Als **Beispiel** lässt sich die Gestaltung der **Provisionierungssysteme** mit dem Ziel erwähnen, die Interessen der Versicherungsvermittler und der Versicherungsunternehmung gleichermassen zu erfüllen,
- Die Beschreibung des Versicherungsgeschehens in Form von **Erfolgsrechnungen und Bilanzen**; hier werden die **internationalen Rechnungsgrundlegungsvorschriften IFRS bzw. US GAAP** immer relevanter; teilweise beeinflussen sie Entscheidungen und Handlungen des Managements
- Die Beschreibung und Analyse der Methoden, Verfahren und Vorgehensweisen bei der Herstellung des Produktes Versicherung (die so genannte **Versicherungsbetriebslehre** im engen Sinn),
- Die Analyse der **Nutzung dieses Produktes durch die Nachfrager im Rahmen eines Risiko Managements** und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die Produzenten des Produktes Versicherung.

Somit liegt eine dritte Modellierung des Produktes Versicherung vor.

1.1.4. Konsequenzen

Aus den oben skizzierten facettenreichen Einflussbereichen der Rechtswissenschaften, Mathematik und Wirtschaftswissenschaften ergeben sich recht komplexe Wechselwirkungen, die im Prinzip in einer Darstellung der Versicherungslehre adäquat zu berücksichtigen sind. Dies erfordert eine **nicht zu unterschätzende Koordination**.

In Analogie dazu stehen auch die Versicherungsunternehmungen in ihrer täglichen Arbeit vor einem solchen Koordinationsproblem. Verkürzt lässt sich das Problem wie folgt charakterisieren:

Die **Konsistenz der drei Modelle**, die in ihrer jeweiligen Sprache formuliert sind, ist zu gewährleisten, wobei zu beachten ist, dass im Grunde genommen alle drei Modelle das gleiche Produkt, nämlich einen speziellen Versicherungstyp - wie z.B. die Kfz-Haftpflichtversicherung - beschreiben .

Für die Versicherungsunternehmungen stellt sich konkret die Frage, welcher Mitarbeitertyp die Funktionen

- des **Dolmetschers** bzw.
- des **Koordinators**

übernehmen kann.

1.1.5. Bedeutung der Sachverständigen

Für die konkrete Herstellung des Produktes Versicherung sind je länger je mehr Sachverständige unabdingbare Voraussetzung. Hierunter verstehen wir Mitarbeiter mit speziellen Kenntnissen in bestimmten Fachgebieten wie z.B. Ingenieure, Chemiker, Mediziner, Physiker, Kunstsachverständige, Kfz-Sachverständige und dergleichen.

Diese Fachspezialisten sind bei der konkreten Arbeit in der Versicherungsunternehmung unbedingt erforderlich, prägen jedoch unserer Einschätzung nach nicht die Versicherungslehre als abstrakten Lehrgegenstand. Insofern gehen wir hierauf nicht mehr weiter ein.

1.2. Aufgabengebiet

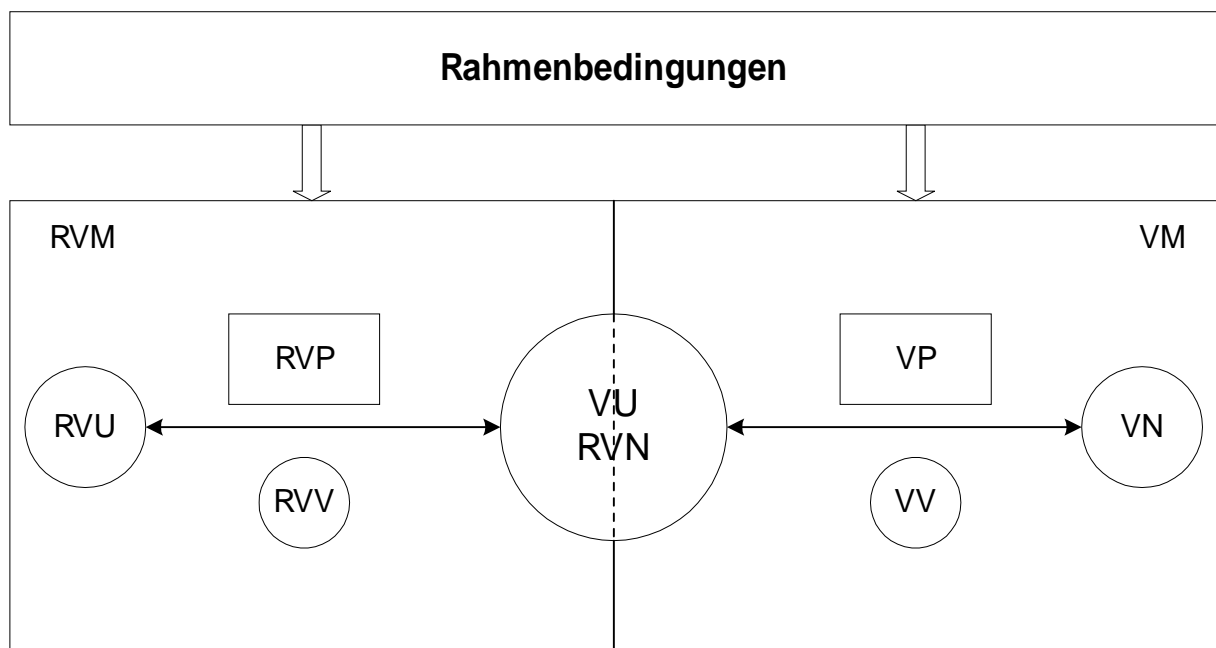
In diesem Vorlesungszyklus beschränken wir uns auf die

ökonomischen Aspekte der Versicherungslehre.

Vom Einfluss der anderen Bereiche wird nur das Allernötigste kurz skizziert. Im übrigen verweisen wir auf die entsprechenden Vorlesungen im Rahmen der Mathematik, Rechtswissenschaften und Wirtschaftswissenschaften.

Zusätzlich sei auf die anderen Vorlesungen zum Gebiet Versicherung an der ETH bzw. der Uni verwiesen.

1.3. Vorgesehene Themengebiete dieser Vorlesung



- V - (Direkt-)Versicherung
- RV - Rück-Versicherung
 - U Unternehmung
 - N Nehmer
 - V Vermittler
 - P Produkt
 - M Markt

Teil I (Herbstsemester)**I. ÜBERBLICK**

1. Einordnung dieser Vorlesung
2. Vorgesehene Themen dieser Vorlesung

II. VERSICHERUNGSPRODUKT

1. Grundlegende Begriffe
2. Das versicherungsmathematische Grundmodell dargestellt am Beispiel der Lebensversicherung
3. Das Produkt Versicherung
4. Versicherungsformen
5. Charakteristika der wesentlichen Versicherungszweige

III. VERSICHERUNGSMARKT

1. Geschichte der Versicherung
2. Rechtliche Rahmenbedingungen
3. Das Drei-Säulen-Konzept der Schweiz
4. Charakteristika der Marktteilnehmer
5. Kollektiv-Lebensversicherungsprodukte in der Schweiz
6. Volumen der Versicherungsmärkte
7. Naturkatastrophen und Grossschäden

(Aus Zeitgründen entfallen eventuell die Abschnitte 5. bis 7.)

IV. VERSICHERUNGSUNTERNEHMUNG

(Produzent, Anbieter; Versicherungsbetriebslehre)

1. Überblick
2. Risikotransfer
3. Risikotransformation durch Ausgleich im Kollektiv
4. Informationstransformation
5. Versicherungstechnisches Restrisiko
6. Charakteristika der klassischen Lebensversicherungsprodukte in der Sparkomponente
7. Preispolitik
8. Zusammenwirken der versicherungstechnischen Verfahren
9. Funktionale Versicherungsbetriebslehre der betriebstechnischen Prozesse

Teil II (Frühjahrssemester)

I. EINFÜHRUNG

1. Überblick
2. Charakteristika des Produktes Versicherung
3. Elemente der Theorie des Konsumenten

II. ENTSCHEIDUNG UNTER UNSICHERHEIT

1. Definition von Unsicherheit
2. Faire Spiele
3. Grundlagen für das Konzept „Erwartungsnutzen“
4. Risikoaversion
5. Eindeutigkeit der Darstellung der Nutzenfunktion

Anhang (Ausführliche Herleitung; wird nicht vorgetragen)

6. Axiomatische Grundlagen für das Konzept "Erwartungsnutzen"
7. Erwartungsnutzen; Nutzenfunktion
8. Eigenschaften der Nutzenfunktion

III. DIE VERSICHERUNGSENTSCHEIDUNG

(Versicherungsnachfrage)

1. Formale Analyse
2. Übertragung auf die Realität

IV. SPEZIALFRAGEN

1. Kritik am Konzept des Erwartungsnutzen
2. Schadenverhütung und Moral Hazard
3. Adverse Selection
4. Qualitatives Risk Management
5. Finanzwirtschaftliche Führungsinformationen für Lebensversicherungsunternehmen
6. Zur Theorie der idealen Versicherung
(Die Beweise aus diesem Abschnitt werden nicht vorgetragen)

V. RÜCKVERSICHERUNG

1. Einleitung
2. Der Rückversicherungsmarkt
3. Klassifikation der Rückversicherungsverträge
4. Charakteristika der Rückversicherungsverträge
5. Proportionale Rückversicherung
6. Nicht-proportionale Rückversicherung
7. Retrozession
8. Alternativer Risikotransfer (ART)

Der Inhalt von Teil I war Gegenstand der Vorlesung im Herbstsemester 2011.

In der vor uns liegenden Vorlesung des Frühjahrssemesters 2012 wird Teil II besprochen. Die wesentlichen Schwerpunkte sind hier die Nachfrage nach dem Produkt Versicherung und die Rückversicherung.

2. Charakteristika des Produktes Versicherung

2.1. Umgangssprachliche Begriffe bzgl. Versicherung und Risiko

2.1.1. Brockhaus Enzyklopädie

1) Versicherung

Bezeichnung sowohl für die Produktionsbetriebe des Versicherungswesens, ..., als auch für das in diesen Betrieben erstellte Wirtschaftsgut **Versicherungsschutz**.

Ein Versicherer gibt dem Versicherungsnehmer gegenüber ein **Versprechen** ab, innerhalb eines bestimmten, genau festgelegten Zeitraumes bei Eintritt bestimmter Ereignisse in der Regel Geldzahlungen an den Versicherungsnehmer, an dessen Hinterbliebenen oder an Dritte zu erbringen. Ein Teil der Unsicherheiten und **Risiken**, denen der Versicherungsnehmer gegenübersteht, wird damit **auf den Versicherer übertragen** (Risikogeschäft). Für das Erbringen der im Versicherungsfall fällig werdenden Geldzahlung erhält der Versicherer vom Versicherungsnehmer zu Beginn der Versicherungsperiode einen **festen Preis**, die **Versicherungsprämie** (den Versicherungsbeitrag). Zur Berechnung der Versicherungsprämie bedienen sich die Versicherer der **Versicherungsstatistik** und der **Versicherungsmathematik**, die wichtige Regeln für die Risikoerfassung und Risikobeurteilung sowie für die Erstellung von Tarifen bereitstellen. Die Prämie wird dabei nicht für jedes einzelne Wagnis berechnet, sondern sie wird immer für eine Gruppe gleichartiger oder annähernd gleichartiger Wagnisse ermittelt. Darüber hinaus hat der Versicherer darauf zu achten, dass bei den von ihm zu Versicherungsbeständen (auch Versicherungskollektive genannt) zusammengefassten Wagnissen (Wagnis = Einheit, die für sich allein versichert wird) **Ausgleichseffekte** auftreten, so dass das für den Versicherer sich ergebende Risiko kleiner wird als die Summe der sich aus den einzelnen Wagnissen ergebenden Risiken. **Neben Ausgleichseffekten im Versicherungsbestand (auch "Ausgleich im Kollektiv" genannt) treten Ausgleichseffekte in der Zeit auf**, da nicht jede Periode, meistens ein Jahr, gleichermassen schadenträchtig ist.

2) Risiko

Aus dem Italienischen: "Klippe, die zu umschiffen ist".

Möglichkeit, dass eine **Handlung oder Aktivität** einen körperlichen oder materiellen **Schaden oder Verlust zur Folge** hat oder mit anderen Nachteilen verbunden ist, im Unterschied zur Gefahr, die eher eine unmittelbare Bedrohung bezeichnet. Von Risiko spricht man nur, wenn die **Folgen ungewiss** sind. Ein sicherer Verlust ist kein Risiko.

Von besonderer wirtschaftlicher Bedeutung sind **versicherbare Risiken**: Haushalte und Unternehmen können **finanzielle Folgen** bestimmter Risiken auf Versicherungsunternehmen **übertragen**, die dann das versicherungstechnische Risiko zu tragen haben.

3) Chance

Aus dem Altfranzösischen "(glücklicher) Wurf beim Würfelspiel".
lateinisch: cadere, fallen.

Günstige Gelegenheit oder Möglichkeit etwas zu erreichen; Aussicht auf Erfolg.

4) Möglichkeit

Allgemein heisst möglich, was sich bestimmt denken und unter gegebenen Voraussetzungen realisieren lässt.

5) Zufall

Das, was ohne erkennbaren Grund und ohne Absicht geschieht; das Mögliche, das eintreten kann, aber nicht eintreten muss.

6) Die Begriffe **Möglichkeit** und **Zufall** beinhalten nach dem Brockhaus keine Bewertung der Ergebnisse; sie sind also "**bewertungsneutral**".

Anders verhält sich das mit den Begriffen Chance und Risiko. Mit dem Begriff **Chance** sind mögliche **positiv bewertete** Ergebnisse verbunden, während mit dem Begriff **Risiko** mögliche **negativ bewertete** Ergebnisse verbunden sind.

Im folgenden wird versucht, diese Unterscheidungen und Zuordnungen strikt einzuhalten. Der "gewöhnliche" Sprachgebrauch ist zumindest bezüglich des Begriffs Risiko nicht immer so exakt. Man denke z.B. an den Begriff Risikothorie.

2.1.2. Versicherungstechnische Literatur

GABLER, VERSICHERUNGSLEXIKON, Hrsg. Peter Koch, 1994

Versicherung

Deckung eines im einzelnen ungewissen, insgesamt geschätzten Mittelbedarfs auf der Grundlage des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit (Dieter Farny). Danach dient die Versicherung der Deckung eines → **Bedarfs**, der ungewiss (→ **Zufall**), insgesamt aber geschätzt (→ **Wahrscheinlichkeit**, → **Statistik**) ist. Es erfolgt ein → **Risikoausgleich**.

SKRIPT DER VORLESUNG VON PROF. KÖHLER

Versicherung ist die gegenseitige Deckung eines im einzelnen zufälligen, im ganzen aber schätzbaren Geldbedarfs durch die Vielzahl gleichartig bedrohter Wirtschaftseinheiten. (Manes)

Hax

Versicherung ist die Deckung eines im einzelnen ungewissen, insgesamt aber schätzbaren Geldbedarfes auf der Grundlage eines durch Zusammenfassung einer genügend grossen Anzahl von Einzelwirtschaften herbeigeführten Risikoausgleiches.

ALBRECHT, PETER, Zur Risikotransformation S. 41

Versicherungsschutz ist die (quasi-sichere) Garantie auf die Erbringung der Dauerleistung der ständigen Fähigkeit, bei Eintreten eines Versicherungsfalles die vertraglich festgelegte Versicherungsleistung zu erbringen.

Die Fähigkeit diese finanziellen Garantien permanent zu erbringen, beruhen einerseits auf dem Risikotransfer und andererseits auf der Risikotransformation.

Beim **Risikotransfer** überträgt der Versicherungsnehmer die Risiken, d.h. für ihn ungewisse Zahlungsverpflichtungen, auf die Versicherungsunternehmung gegen Zahlung einer im voraus festgelegten Versicherungsprämie. D.h. der Versicherungsnehmer tauscht für ihn unsichere finanzielle Belastungen gegen für ihn sichere finanzielle Belastungen.

Die Versicherungsunternehmung ist in der Lage diese Risiken zu übernehmen, d.h. diesen Risikotransfer zu realisieren, da sie eine **Risikotransformation** vornimmt. Letztere besteht darin, dass die Versicherungsunternehmung **Ausgleichseffekte** im Versichertenbestand oder im Zeitablauf realisiert. Sie betrachtet also nicht mehr den einzelnen Fall isoliert, sondern eine grosse Anzahl von gleichartigen Sachverhalten (Risiken) als Gesamtheit. Es findet ein Übergang von Einzelphänomenen zu Massenphänomenen statt. Die wesentliche Aufgabe der betriebswirtschaftlichen Versicherungslehre besteht in der Analyse des Risikotransfers und der Risikotransformation.

Wesentliche Begriffspaare in diesem Zusammenhang sind

zufällig	Wahrscheinlichkeiten
schätzbar	Statistik
gegenseitig	Risikoausgleich
Entstehen eines Geldbedarfs	Decken des Geldbedarfs (finanzielle Garantie)

2.1.3. Zum Umgang mit Risiken

Den Menschen stehen im Prinzip drei mögliche Verhaltensweisen gegenüber Risiken zur Verfügung:

1) Man kann Risiken **selbst tragen.**

Dies geschieht sicherlich bei allen Risiken, derer man sich nicht bewusst ist.

Man kann jedoch Risiken auch bewusst selbst tragen, aus den unterschiedlichsten Gründen:

- die Risiken werden als gering eingestuft (Problematik: wie wird hier gering definiert? Wahrscheinlichkeit des Eintretens; Höhe des "Schadens"?)
- man hat psychologische Motive: Nervenkitzel, Selbstbestätigung, Genuss
- man hat keine andere Möglichkeit (vgl. 2) und 3))

Beispiel: Rauchen.

2) Man kann Risiken **vermeiden oder **vermindern**.**

Dies setzt eine Verhaltensänderung, eine Reaktion des Menschen voraus.

Risikovermeidung besteht darin, Situationen auszuweichen, die Risiken beinhalten.

Beispiel: Aufgeben des Rauchens.

Risikoverminderung liegt vor, wenn Vorkehrungen getroffen werden, die zwar das Risiko nicht völlig ausschalten, jedoch die Wahrscheinlichkeit des Eintritts des Schadens (Risikovorbeugung) oder das Ausmass eines eingetretenen Schadens (Risikobegrenzung oder Risikoteilung) herabsetzen.

Beispiele:

- Reduktion der Anzahl der gerauchten Zigaretten.
- Errichten einer Brandmauer durch eine Unternehmung, um die Ausdehnung eines Brandes zu verhindern.

3) Man kann Risiken **übertragen, d.h. man kann die **negativen finanziellen Folgen** eines Ereignisses **auf Dritte übertragen**, so dass diese nicht vom Direktbetroffenen selbst getragen werden müssen.**

Der **Abschluss einer Versicherung** ist das typische und verbreitetste Mittel der Risikoübertragung.

Beispiele:

- **Feuerversicherung** für das Privathaus.
- Durch eine **Krankenversicherung** werden für einen Raucher selbstverständlich **lediglich die finanziellen Folgen** von Krankheiten aufgrund des Rauchens abgedeckt, die gesundheitlichen Schäden an der Lunge z.B. können durch eine Versicherung nicht rückgängig gemacht werden.
- Weitere Beispiele sind vertragliche Abmachungen wie "freibleibend", "unverbindlich", "Valutaklauseln". Auch **Fakturierung in eigener Währung** im Auslandsgeschäft kann als solche Massnahme verstanden werden.

Bei diesen letztgenannten Beispielen können die **Machtverhältnisse** eine wesentliche Rolle spielen; teilweise liegt hier ein **Risikotransfer** vor, **für den keine Prämie bezahlt wird**. Man sollte dann vermutlich eher von **Risikoüberwälzung** sprechen.

4) In der Realität stehen Privatpersonen und Unternehmungen vor vielfältigen Entscheidungssituationen, in denen das Verhalten gegenüber Risiken festzulegen ist. Voraussetzung für seriöse Entscheidungen ist eine dem Problem angemessene Analyse der konkreten Situation. Oft wird eine geeignet erscheinende Mischung der oben aufgeführten Verhaltensweisen ausgewählt. Beispielsweise können gleichzeitig risikovermindernde Massnahmen ergriffen, Versicherungen abgeschlossen und ein gewisses Risiko bewusst selbst getragen werden. Als allgemeingültiger Ausdruck für diese Verhaltensweisen hat sich der Begriff

Risk Management

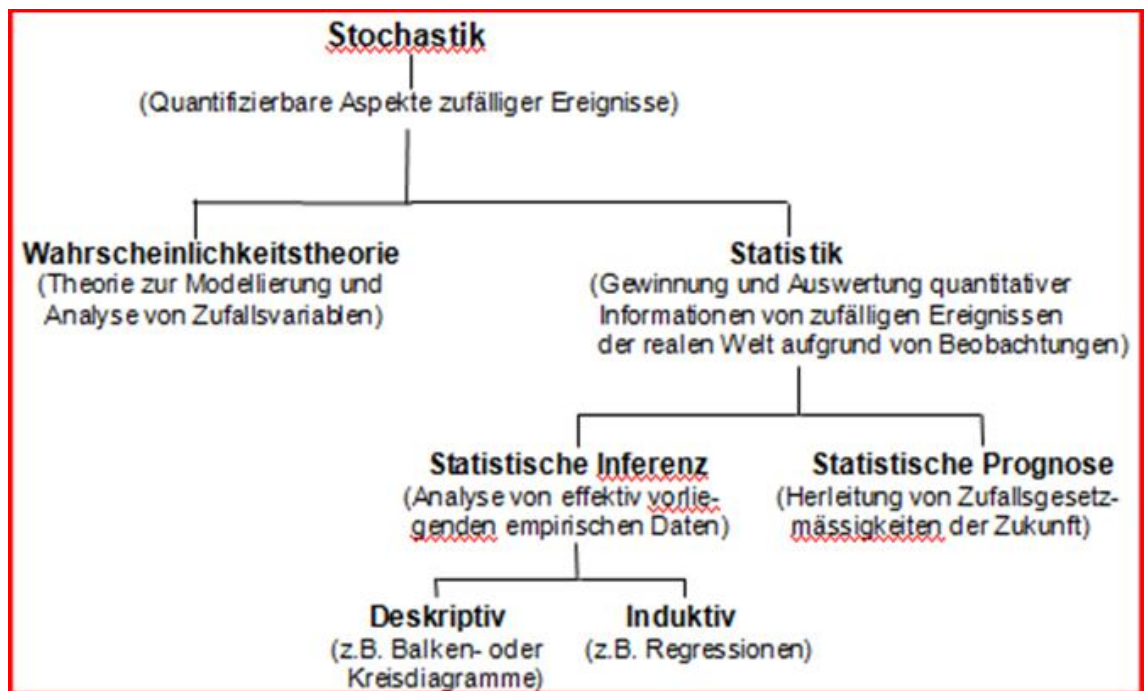
eingebürgert.

Wir gehen in Kapitel IV dieser Vorlesung detailliert auf diesen Themenkomplex ein.

2.2. Mathematische Grundbegriffe bzgl. Risiko¹

2.2.1. Verbale Einführung

1) Die **Stochastik** wird als **Wissenschaft von den Zufallsgesetzmässigkeiten** bezeichnet. Sie umfasst die folgenden mathematischen Theorien



2) In der **Wahrscheinlichkeitstheorie** wird das Verhalten von Variablen analysiert, bei denen im Einzelfall nicht vorhergesagt werden kann, welchen Wert sie in Zukunft annehmen werden, z.B. beim Werfen eines Würfels die oben aufliegende Augenzahl. Man bezeichnet solche Variablen als **Zufallsvariablen**. Falls jedoch Zufallsgesetzmässigkeiten, z.B. Wahrscheinlichkeitsverteilungen, bekannt sind, lassen sich gewisse Aussagen über die Variablen ableiten.

3) Im Gegensatz zur Wahrscheinlichkeitstheorie, die Sachverhalte aus theoretischer Sicht analysiert, beschäftigt sich die **Statistik** grundsätzlich mit realen Phänomenen. Die Statistik wird in diesem Zusammenhang benutzt, um zwei Aufgaben zu lösen:

¹ Storm Regina, Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle, 1994

4) In der **statistischen Inferenz** wird versucht, aus effektiv vorliegenden empirischen Daten, d.h. aus Daten der Vergangenheit, Zufallsgesetzmässigkeiten abzuleiten. Man sucht Regeln, mit denen man das **Verhalten der Zufallsvariablen** für die zu Grunde liegende Beobachtungsperiode mathematisch beschreiben kann.

In der Brockhaus Enzyklopädie findet man hierzu:

Inferenztheorie:

"Statistik: die Theorie des induktiven Schliessens auf der Grundlage empirischer Beobachtung (z.B. Konfidenzschluss)."

Konfidenzschluss:

"[lat. confidentia: Zuversicht, Vertrauen] in der Statistik der Schluss von Stichprobeninformationen auf einen unbekanntem Parameter der Grundgesamtheit mit Hilfe der Konfidenzintervallen (Vertrauensintervallen)."

5) In der **statistischen Prognose** wird versucht, mit Hilfe von mathematischen Methoden aus den Zufallsgesetzmässigkeiten der Vergangenheit die **Zufallsgesetzmässigkeiten der Zukunft** herzuleiten. Hier üben Annahmen über mögliche zukünftige Veränderungen und über deren Eintretenswahrscheinlichkeiten einen entscheidenden Einfluss aus.

2.2.2. Deterministische Experimente - Zufallsexperimente

Es ist zwischen **deterministischen Experimenten** und **Zufallsexperimenten** zu unterscheiden.

1) Unter einem **deterministischen Experiment** verstehen wir einen beliebig oft wiederholbaren Vorgang, der nach einer ganz bestimmten Vorschriften ausgeführt wird und dessen Ergebnis aufgrund von (physikalischen) Gesetzmässigkeiten und von einem Anfangszustand eindeutig bestimmt ist. Diese Ergebnisse sind im Prinzip vorhersehbar und berechenbar.

Beispiel aus der Physik: Newtonsche Mechanik (insbesondere Himmelsmechanik)

$$\text{Freier Fall } s = \frac{1}{2} g t^2$$

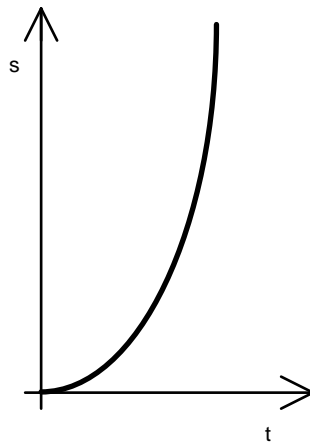
s zurückgelegter Weg

g Fallbeschleunigung

t Fallzeit

$g \approx 10 \text{ m / s}^2$ \approx Problem der Messgenauigkeit, nicht zufallsbedingt

Der zurückgelegte Weg lässt sich als eindeutige Funktion der Zeit darstellen und beliebig exakt berechnen.



2) Im Gegensatz dazu stehen **Zufallsexperimente**.

Unter einem **Zufallsexperiment** verstehen wir einen beliebig oft wiederholbaren Vorgang, der nach ganz bestimmten Vorschriften ausgeführt wird und dessen Ergebnis vom Zufall abhängt, d.h. dessen Ergebnis nicht im voraus eindeutig bestimmt werden kann.

Beispiel:

Einmaliger Wurf mit einem "idealen" Würfel. Die möglichen Ergebnisse sind die Augenzahlen 1, ..., 6.

Bei jedem Wurf tritt genau eine der Augenzahlen 1, ..., 6 ein; welche, kann nicht vorhergesagt werden.

2.2.3. Relative Häufigkeit

1) Definition: Tritt bei n unter gleichen Bedingungen durchgeführten Versuchen das zufällige Ereignis A gerade m -mal ein, so heisst m die **absolute Häufigkeit** und m/n die **relative Häufigkeit** von A . Letztere wird mit $h_n(A)$ bezeichnet.

Für $h_n(A)$ gilt: $0 \leq h_n(A) \leq 1$ wegen $0 \leq m \leq n$.

Für $m = n$ gilt: $h_n(A) = 1$, d.h. A ist in den n Versuchen n -mal aufgetreten, d.h. jedesmal.

Für $m = 0$ gilt: $h_n(A) = 0$, d.h. A ist in den n Versuchen nie aufgetreten.

Unter gewissen Voraussetzungen zeigt die relative Häufigkeit eine Stabilität, wenn die Anzahl der durchgeführten Versuche genügend gross ist.

Beispiele:²

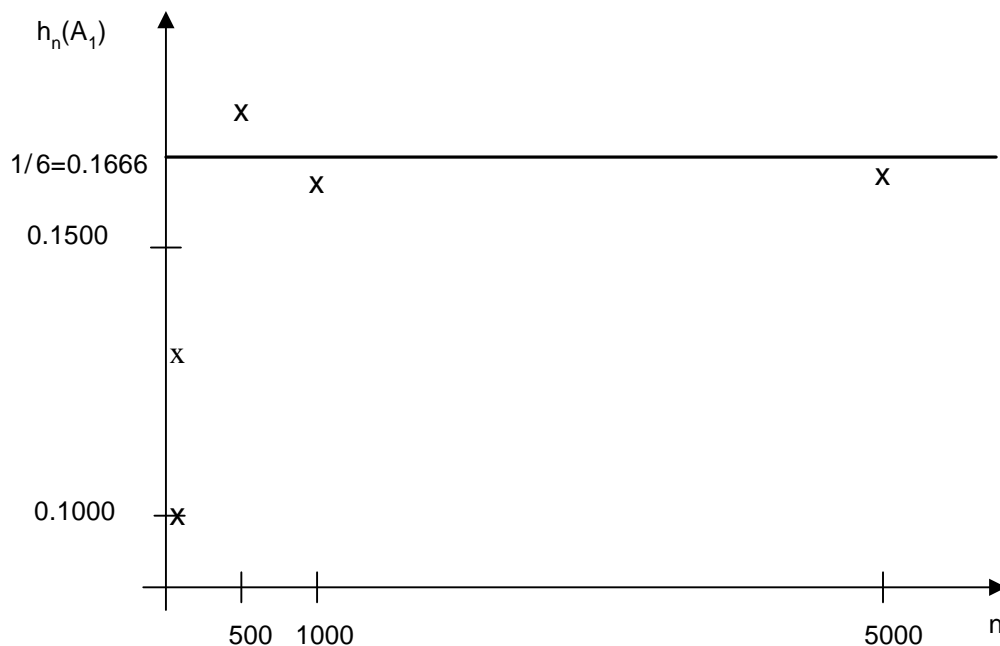
a) Werfen einer Münze, zufälliges Ereignis A sei das Auftreten der Zahl

	Anzahl der Würfe: n	Anzahl des Auftretens von A: m	Relative Häufigkeit von A: $h_n(A)$
Buffon	4'040	2'048	0.5080
K. Pearson	12'000	6'019	0.5016
K. Pearson	24'000	12'012	0.5005

b) Werfen eines Würfels

Anzahl der Würfe: n	Anzahl der vorkommenden Einsen: m	Relative Häufigkeit von A_1 : $h_n(A_1)$
50	5	0.1000
100	13	0.1300
500	88	0.1760
1'000	159	0.1590
5'000	822	0.1644

Es gilt $1/6 = 0.1666$.



² Storm Regina: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle, 1994

2) Ausgehend von den in den obigen Beispielen beobachteten Erscheinungen kommt man zu dem Schluss, dass im allgemeinen Fall ein fester Wert existiert, um den die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses schwankt, und dem sie sich um so mehr nähert, je grösser die Anzahl der Versuche ist. Diese Konstante nennt man die **Wahrscheinlichkeit** des zufälligen Ereignisses A und bezeichnet sie mit $P(A)$.

Die mathematische Begründung dafür gibt das **Gesetz der grossen Zahlen**, das **Jakob Bernoulli** (1654 - 1705) formuliert und bewiesen hat. Dieser Grenzwertsatz sagt folgendes aus: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses A um mehr als eine beliebig vorgegebene Grösse $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ von der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ dieses Ereignisses abweicht, wird verschwindend klein, wenn die Anzahl n der Versuche unendlich gross wird.

$P(A)$ ist eine Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt, d.h. es gilt die Ungleichung $0 \leq P(A) \leq 1$. (Man vergleiche dazu die gleiche Eigenschaft der relativen Häufigkeit!) Nach ihrer Entstehung ist diese Interpretation der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit das Resultat eines Wiederholungsvorganges und nur **als Folge von Massenerscheinungen** zu verstehen.

2.2.4. Parameter von Zufallsvariablen

1) Der **Erwartungswert einer diskreten Zufallsgrösse** X , die die Werte x_i mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i ($i = 1, 2, \dots$) annehmen kann, ist definiert durch

$$\mu := E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Der Erwartungswert ist also ein mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichteter Mittelwert.

Zum Vergleich sei auf das arithmetische Mittel \bar{x} der Werte x_1, \dots, x_n verwiesen:

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Hier wird das konstante Gewicht $\frac{1}{n}$ zur Mittelwertbildung benutzt.

Beispiel: (Wurf mit einem idealen Würfel) Es gilt $x_i = i$ und $p_i = \frac{1}{6}$ für $i = 1, 2, \dots, 6$ und

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$$

Beachte: Der Wert 3.5 kann nicht der Wert eines Würfelwurfes sein.

Der **Erwartungswert einer stetigen Zufallsgrösse** X mit der Dichte $f(x)$ ist definiert durch

$$\mu := \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Der Erwartungswertoperator ist additiv

$$\mathbb{E}[\sum_i X_i] = \sum_i \mathbb{E}[X_i].$$

2) Die Streuung oder Varianz einer diskreten Zufallsgrösse X ist definiert durch

$$\sigma^2 = D^2[X] = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i.$$

Die (positive) Quadratwurzel aus der Streuung heisst **Standardabweichung** oder mittlere quadratische Abweichung von X und wird mit σ bezeichnet.

Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= D^2[X] = \mathbb{E}[X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \mu^2. \end{aligned}$$

Beispiel: Würfel:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^6 i^2 \frac{1}{6} - (3,5)^2 = \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - (3,5)^2 = 2,9^2$$

$$\sigma = 1,71.$$

Die **Streuung oder Varianz einer stetigen Zufallsgrösse** X Dichte $f(x)$ ist definiert durch

$$\sigma^2 = D^2[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

3) Der Variationskoeffizient oder Variabilitätskoeffizient einer Zufallsgrösse X mit $\mu \neq 0$ ist definiert durch

$$v = \frac{\sigma}{\mu}.$$

σ wird häufig in Prozent angegeben.

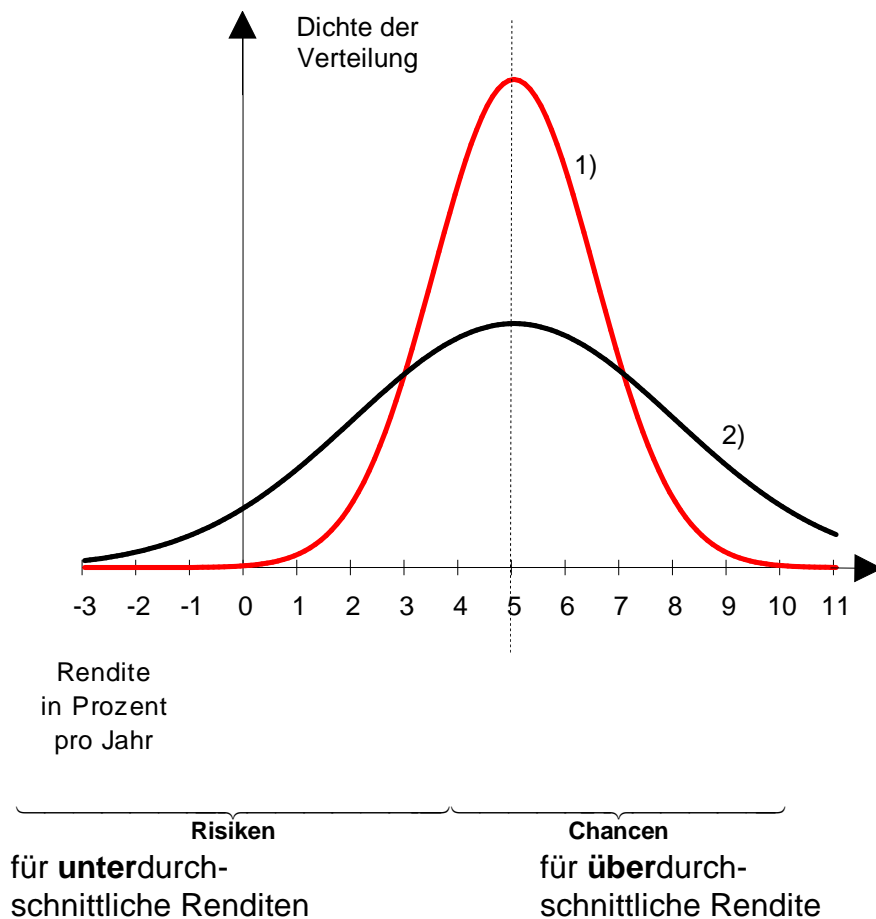
Der Variationskoeffizient ist ein **relatives Streuungsmass**.

2.2.5. Quantifizierung des Risikos

1) Am Beispiel der Rendite von Kapitalanlage-Portefeuilles soll nun in Fortsetzung der Ausführungen des vorigen Abschnittes versucht werden, eine Quantifizierung des Risikos zu veranschaulichen.

Hierzu nehmen wir an, dass die jährlichen Renditen der betrachteten Portefeuilles normal verteilt sind. Das ist eine heroische, jedoch übliche Annahme.

Beispiel:



Der **Erwartungswert der Renditen** dieser Portefeuilles liegt bei 5 %.

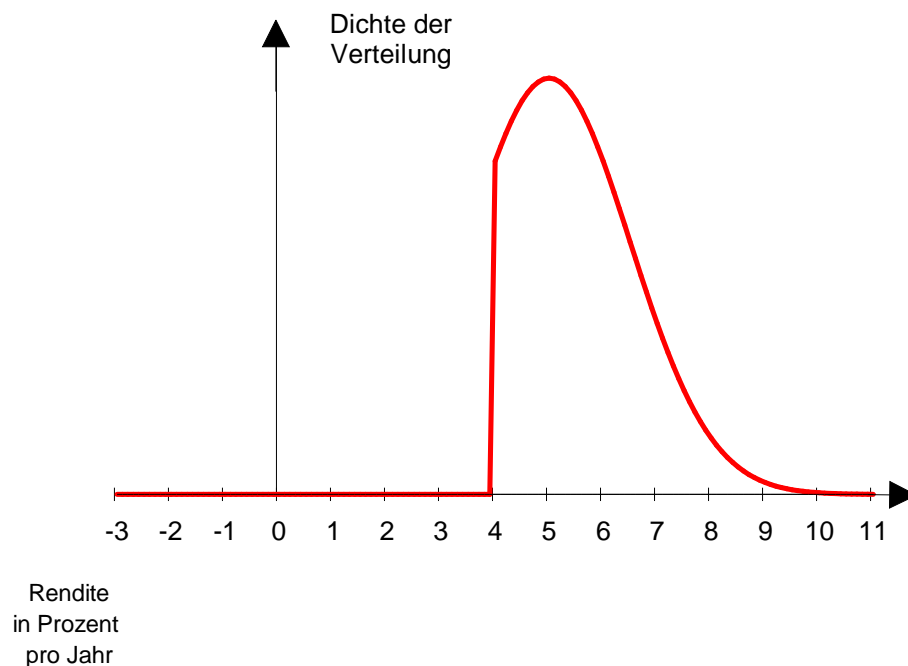
Beide Portefeuilles liefern also "im Mittel" eine jährliche Rendite von 5 %. Portefeuille 1) unterscheidet sich von Portefeuille 2) lediglich dadurch, dass die Varianz bzw. Standardabweichung von Portefeuille 1) kleiner ist als diejenige von Portefeuille 2). Dies führt dazu, dass die Wahrscheinlichkeit eine Rendite in der Nähe von 5 % zu erzielen bei Portefeuille 1) grösser ist als bei Portefeuille 2). Man sagt deswegen,

dass Portfeuille 1) eine kleinere Volatilität hat als Portfeuille 2). Oft bezeichnet man deswegen **auch Portfeuille 1) als "weniger riskant" als Portfeuille 2).**

2) Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Varianz bzw. die Standardabweichung ein sogenanntes **symmetrisches Streuungsmass** ist. Abweichungen vom Erwartungswert nach oben werden gleich gewichtet wie solche nach unten (vgl. den "mean-variance-Ansatz" von Markowitz). Die Varianz (bzw. die Standardabweichung) wird in der Praxis oft auch als "Risikomass" bezeichnet, obwohl dies in vielen Fällen insofern nicht korrekt ist, als meist nur Abweichungen in eine Richtung als Risiko zu betrachten sind, während Abweichungen in die entgegengesetzte Richtung als Chancen zu sehen sind. Dies gilt sicherlich für das betrachtete Beispiel der Renditen. Dahinter verbirgt sich die Erkenntnis, dass die Varianz - oder auch die Volatilität - von Renditen bei Kapitalanlagen, sowohl Chancen als auch Risiken darstellt. In solchen Situationen sind also **asymmetrische Streuungsmasse** angezeigt, wie dies auch in neueren Theorien der Finanzmärkte erfolgt. Im Abschnitt über die rechtlichen Rahmenbedingungen werden wir den **Schweizer Solvenz Test (SST)** besprechen, in dem z.B. die **Risikomasse Value at Risk (VaR) und Expected Shortfall (ES)** benutzt werden, die in der modernen Finanzmarkttheorie häufig verwendet werden.

3) Für Lebensversicherungen, die gewisse Mindestrenditen garantieren müssen (z.B. bis 2002 4 % auf Altersguthaben im Rahmen des BVG), stellen Renditen unter gewissen Grenzwerten **Risiken** dar, **die nicht eintreten dürfen.**

Die Lebensversicherungsunternehmungen müssen die Kapitalanlagepolitik also so gestalten, dass die Wahrscheinlichkeit für Renditen unter 4 % im Prinzip gleich Null ist. Eine **zugehörige Dichtefunktion aus Sicht des Kunden** wird in nachstehender Grafik wiedergegeben:



Diese Dichtefunktion hat die gleiche Gestalt wie die einer entsprechenden Kapitalanlage-Option. Renditen unter 4 % kommen nicht vor, da die Wahrscheinlichkeit hierfür gleich Null ist. Man sagt dazu, dass das **"Short-fall-Risiko" ausgeschaltet** ist. Die Chancen höherer Renditen sind dagegen gewahrt, da deren Wahrscheinlichkeit grösser als Null sind. Bei einem solchen Portfolio ist also eine minimale Rendite von 4 % garantiert, jedoch können mit echter positiver Wahrscheinlichkeit höhere Renditen realisiert werden.

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **"Vermögensversicherung"**. Der Versicherungsnehmer (Käufer) hat einen Risikotransfer vollzogen. Das Risiko, Renditen unter 4% zu realisieren, hat er an die Versicherungsunternehmung übertragen.

Möglichkeiten hierfür bieten einerseits beispielsweise Lebensversicherungen seit Jahrzehnten an und andererseits beispielsweise Banken seit einigen Jahren; letztere bedienen sich der sogenannten derivaten Kapitalanlageinstrumente (z.B. Optionen). Es stellt sich die Frage nach dem Preis (der Prämie) für diesen Risikotransfer (für diese Risikoversicherung).

4) Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass – zumindest im Bereich der **Kapitalanlagen** – nicht die Volatilität das eigentliche Risiko darstellt, sondern das **"Short-Fall-Risiko"**. Hierunter wird das Risiko verstanden, dass die realisierte Rendite unter der angestrebten (geplanten) Rendite liegt; oder anders formuliert: das realisierte Portfolio hat schlechter rentiert als das **"Benchmark-Portfolio"**.

Die Höhe der "Benchmark-Rendite" und das Ausmass der Sanktionen bei Nichterreichen des Zieles haben selbstverständlich Auswirkungen auf die Zusammensetzung des realen Portfolios. Des weiteren ist zu beachten, für welche Zeiträume die "Benchmark-Rendite" zu übertreffen ist. So ist beispielsweise zu unterscheiden, ob diese Vorgabe permanent gilt (wie z.B. im BVG) oder lediglich per Ende einer vorgegebenen Zeitperiode.

Allgemein gilt: **je geringer die Vorgaben sind, desto risikoreicher und damit potentiell ertragreicher kann die Anlagepolitik gestaltet sein.**

Man bedenke in diesem Zusammenhang die Vorgaben durch den BVG-Zinssatz, (von 1985 bis 2002: 4%; 3.25% in 2003; 2.25% in 2004; 2.50% für 2005 bis 2007; 2.75% in 2008; 2.00% in 2009, 2010 und 2011; 1.5% in 2012).

2.3. Das Produkt "Versicherung"

Das Produkt "Versicherung" setzt sich im allgemeinen Fall aus drei Komponenten zusammen:

- Risiko-Komponente,
- Spar-Komponente,
- Dienstleistungs-Komponente.

2.3.1. Risiko-Komponente

1) Die Risiko-Komponente des Produktes Versicherung ist - gemäss Albrecht - eine **quasisichere Garantie** auf die Erbringung einer Geldzahlung, wenn innerhalb eines fest vorgeschriebenen Zeitraumes bestimmte, im voraus festgelegte Ereignisse eintreten. Bei einer Gemischten Lebensversicherung z.B. der Tod während der Versicherungsdauer.

Ganz entscheidend bei dieser Garantie ist, dass sie während der Versicherungsdauer **permanent** gilt. Der Risikoschutz einer Versicherung wird also permanent gewährt oder anders formuliert: **Der Risikoschutz wird permanent produziert.**

Es handelt sich hierbei um eine abstrakte Dienstleistung, die nicht lagerfähig ist.

2) Der "**Verzehr**" (oder "Verbrauch", "Konsum") dieses Risikoschutzes durch den Versicherungsnehmer erfolgt erstens auch **permanent** und zweitens **gleichzeitig mit der Produktion**. Hierbei ist zu beachten, dass der Risikoschutz im Sinn einer abstrakten Dienstleistung unabhängig davon "konsumiert" wird, ob tatsächlich ein Versicherungsfall in der Versicherungsperiode eingetreten ist oder nicht.

Zur Risiko-Komponente der Versicherung gehört selbstverständlich auch die Leistungserbringung im Versicherungsfall. Im Gegensatz zur abstrakten Dienstleistung Produktion von Risikoschutz liegt hier eine konkrete Dienstleistung vor, deren Realisierung der Versicherungsnehmer direkt spürt, indem er z.B. eine Geldzahlung erhält.

3) Die **Produktion des Risikoschutzes** ist an gewisse Bedingungen gebunden.

Zunächst setzt sie einen **Risikotransfer** voraus. Der Versicherungsnehmer ist gewissen Risiken ausgesetzt, die er weder vermeiden noch vollständig selbst tragen kann bzw. möchte. Durch den Abschluss einer Versicherung transferiert er diese Risiken zumindest teilweise an die Versicherungsunternehmung. Hierzu erhält diese gewisse Infor-

mationen über den Versicherungsnehmer, die zu versichernden Risiken und die Versicherungsdauer. Gegen Zahlung der Versicherungsprämie (Risikoprämie) ist die Versicherungsunternehmung bereit, den Versicherungsschutz (Risikoschutz) im Sinn der Garantie zu gewähren.

4) Die zu versichernden Risiken müssen im Einzelfall tatsächlich **vom Zufall abhängig** sein. Das Eintreten des Versicherungsfalls sollte nicht durch das Verhalten des Versicherungsnehmers gesteuert werden können. Diese Bedingung ist sicherlich nicht immer zu genüge erfüllt. (Verhaltensänderungen aufgrund von Versicherungsschutz, bewusstes Herbeiführen des Versicherungsfalls, Anspruchsmentalität, Verlauf des Invaliditätsrisiko in Abhängigkeit von der persönlichen wirtschaftlichen Lage der Versicherten. Man subsumiert diese Probleme unter dem Begriff "**moral hazard**".)

Wichtig ist, **dass die Höhe der Risikoleistungen als Zufallsvariable** interpretiert werden kann. Ihre Realisierungen sind nicht exakt vorhersagbar, auch wenn die zugehörige Verteilungsfunktion völlig bekannt sein sollte. Dies würde bedeuten, dass das Diagnose- und Prognoserisiko ausgeschaltet wäre. Das Zufallsrisiko ist nicht ausschaltbar.

5) Im Gegensatz dazu wird die **Risikoprämie**, die der Versicherungsnehmer an die Versicherungsunternehmung zahlen muss, im **voraus festgelegt**. Sie ist somit für den Versicherungsnehmer fest kalkulierbar. Im Laufe der Zeit sind selbstverständlich für neue Versicherungsperioden angepasste (also auch erhöhte) Risikoprämien möglich

Im Verständnis der einschlägigen Literatur liegt keine Versicherung vor, falls die Risikoprämie im nachhinein durch Umlage der Risikoleistungen auf eine entsprechende Risikogemeinschaft bestimmt wird. In einem solchen Fall ist nämlich die Risikoprämie für jeden Teilnehmer der Risikogemeinschaft eine Zufallsvariable, wie die Summe aller Risikoleistungen. Erstere ergibt sich direkt aus letzterer allein durch eine nachträglich vollzogene Umverteilung.

Bei einer Risiko-Versicherung tauscht also der Versicherungsnehmer für einen bestimmten Zeitraum eine **zufallsabhängige Belastung** (Schaden im Versicherungsfall) gegen eine **sichere Belastung** (Risikoprämie). Bei einer Versicherung mit Gewinnbeteiligung - z.B. Lebensversicherungen - stellt die Tarifprämie eine obere Preisgrenze für den Versicherungsschutz dar. Aufgrund der Gewinnbeteiligung (Bonus) kann der effektive Preis tiefer ausfallen. Eine nachträgliche Erhöhung über die Tarifprämie hinaus ist ausgeschlossen. Hier ist die Sicherheit nur einseitig - jedoch wird die Möglichkeit des Unterschreitens der Tarifprämie durch die Bonusbeteiligung vermutlich positiv - d.h. als Chance - bewertet und nicht als Risiko. (Vergleichbar

mit einer Option, der Preis liegt mit Sicherheit unter einer Obergrenze, nämlich der Tarifprämie).

Ob der allfällige Schaden tatsächlich in der vom Versicherungsnehmer empfundenen Schadenhöhe finanziell abgegolten wird, hängt von der Ausgestaltung der Versicherung ab und dem Erfülltsein der entsprechenden Bedingungen.

6) Die Verfahren und Methoden zur Produktion des Risikoschutzes werden als **Risikotransformation** bezeichnet und in Kapitel IV des ersten Teils des Vorlesungszyklus ausführlich besprochen. Im wesentlichen geht es hier darum, **Ausgleichseffekte** für die Versicherungsunternehmung zu realisieren, so dass für diese die Risiken tragbar werden.

7) Im Gegensatz dazu sind für die Versicherungsunternehmung sowohl die gesamten Prämieinnahmen als auch die gesamten Leistungsausgaben Zufallsvariablen, d.h. mit Risiken und Chancen behaftete Geldströme. Dies ist darauf zurückzuführen, dass im voraus nicht bekannt ist, wie viele Versicherungen in welcher Höhe abgeschlossen werden und während der ganzen Versicherungsdauer im Bestand bleiben. Gleichzeitig ist auch die Höhe der Risikoleistungen im voraus nicht exakt bestimmbar.

An dieser Stelle möchten wir kurz auf zwei grundlegende Probleme bei der Produktion von Risikoschutz durch Versicherungsunternehmungen verweisen, die vom **Verhalten der Versicherungsnehmer** abhängen; sie sind also durch die Versicherungsunternehmung nicht direkt beeinflussbar.

8) Zum einen handelt es sich um die **Antiselektion (adverse selection)**. Hiermit umschreibt man den Problembereich, der dadurch entsteht, dass der Versicherungsnehmer mehr versicherungsrelevante Information hat als die Versicherungsunternehmung und somit seine Nachfrage nach Versicherungsschutz entsprechend modifizieren kann. Man spricht in diesem Zusammenhang vom Problem der **asymmetrischen Information**. Als Beispiel betrachten wir einen Menschen, der über seinen Gesundheitszustand besser informiert ist als die Versicherungsunternehmung. Falls er Informationen hat, die den Schluss zulassen, dass er vermutlich lange leben wird, ist seine Neigung, eine Altersrente zu kaufen grösser, als wenn er Informationen gegenteiligen Inhalts hat. Im zweiten Fall wird er eher dazu neigen, eine Todesfallkapitalversicherung abzuschliessen. Eine wesentliche Aufgabe der Risikopolitik der Versicherungsunternehmung besteht darin, sich gegen diese Antiselektion zu schützen.

Die entsprechenden Massnahmen fasst man unter dem Begriff **Underwriting-Politik** zusammen. Hierunter fällt die Informationsbeschaffung, die Taxierung des Risikos und gegebenenfalls die

Bestimmung von angemessenen Sicherheitszuschlägen oder Leistungseinschränkungen.

9) Der zweite Problembereich wird mit dem Begriff "**moralisches Risiko**" (**moral hazard**) bezeichnet. Hiermit wird die mögliche Verhaltensänderung angesprochen, die beim Versicherungsnehmer gerade durch den Risikoschutz ausgelöst wird: Man geht Risiken ein, da aufgrund des Versicherungsschutzes angeblich "nichts passieren" kann. Ferner ist zu beachten, dass bei Versicherungsschutz eine gewisse Anspuchsmentalität entstehen kann, da der Versicherte für die bezahlte Risikoprämie eine konkret spürbare Leistung erwartet.

Die wirksamste Methode sich hiergegen zu schützen, besteht in der **Einführung eines Selbstbehaltes**, d.h. der Versicherungsnehmer erhält keinen vollen Versicherungsschutz; er ist vielmehr an den Schadenkosten beteiligt. Hierdurch kann eine Gleichschaltung der Interessen von Versicherungsnehmer und Versicherungsunternehmung erreicht werden.

Diese beiden grundlegenden Problembereiche im Zusammenhang mit dem Risikoschutz werden im folgenden an verschiedenen Stellen immer wieder angesprochen werden und in Kapitel IV dieser Vorlesung ausführlich diskutiert.

2.3.2. Spar-Komponente

1) Die Spar-Komponente spielt bei etlichen Personenversicherungen eine substantielle Rolle; bei den Nicht-Personenversicherungen spielt sie eine untergeordnete Rolle, obwohl auch dort mittlerweile enorme Rückstellungen zur Schadenerledigung bereitgestellt werden müssen und die Zinserträge immer relevanter für die Ergebnisse bzw. die Preisbildung werden.

Im Prinzip ist zwischen aufbauenden Spar-Komponenten und abbauenden Spar-Komponenten zu unterscheiden.

Eine **aufbauende** Spar-Komponente liegt vor, falls Kapital für einen Versicherten geäufnet wird, wie z.B. in einer Gemischten Lebensversicherung. Hier liegt eine **anwartschaftliche Spar-Komponente** vor.

Eine **abbauende** Spar-Komponente liegt vor, falls ein vorhandenes Kapital für einen Versicherten abgebaut wird, wie z.B. bei einer laufenden Rente mit Finanzierung durch das Kapitaldeckungsverfahren oder bei einer privaten Krankenversicherung. Hier liegt eine **Entspar-Komponente** vor.

Eine ganz entscheidende Rolle bei beiden Arten von Spar-Komponente spielt der modellmässig benutzte Zinssatz, der so genannte **technische Zinssatz**. Wegen der enorm langen Laufzeiten (20 - 30

Jahre sind durchaus üblich) ist die Wirkung von Änderungen des technischen Zinssatzes bezogen auf die garantierten Versicherungsleistungen enorm.

2) Die Verwendung eines technischen Zinssatzes bedeutet die Gewährung einer Garantie. In den Lebensversicherungsprodukten wird eine **permanente Mindestzinsgarantie** abgegeben - dies in ausgeprägter Analogie zum Gewähren des Risikoschutzes.

Eine Mindestzinsgarantie beinhaltet **zum ersten** eine **Garantie auf nominelle Substanzerhaltung** der vorhandenen Kapitalien eines Versicherten und zusätzlich **zum zweiten** eine **permanente Äufnung der Kapitalien** gemäss dem jeweiligen **technischen Zinssatz**.

Der **Preis für das Gewähren** dieser permanenten Mindestzinsgarantie schlägt sich in den effektiv gewährten **bonusrelevanten Renditen** nieder, die das Ausmass der Überschussbeteiligung prägen. Eine explizite Verrechnung findet nicht statt - ist wohl auch zur Zeit nicht möglich, da die Garantie implizit durch das gewährte Kapitalanlageverhalten produziert wird.

2.3.3. Dienstleistungs-Komponente

1) Die Risiko-Komponente und die Spar-Komponente bestehen beide sowohl aus abstrakten Garantien als auch aus möglichen konkreten Geldzahlungen. Dies sind typische Versicherungsmerkmale.

Bei der **Dienstleistungs-Komponente** stehen die **konkreten Tätigkeiten** wie Tarifierung, Beratung, Administration, Schadenabwicklung etc. im Vordergrund. Gewisse Elemente hiervon sind unabdingbar, um eine Versicherung zustande kommen zu lassen, wie z.B. das Erfassen und Bearbeiten von bestimmten Informationen. Die obigen Garantien müssen z.B. vertraglich festgehalten werden (Versicherungsvertrag, Police). Ferner gehören selbstverständlich auch die Schadenabwicklung und Leistungserbringung im Versicherungsfall dazu.

Andere Elemente haben eher den Charakter von Zusatzdienstleistungen wie z.B. risikopolitische Expertisen oder Informationsveranstaltungen.

Die Bedeutung der Zusatzdienstleistungen wird vermutlich im Laufe der Zeit enorm zunehmen. Für die Versicherungsunternehmen geht es hier darum, sich dem Versicherungsnehmer, d.h. dem Kunden gegenüber, als Problemlöser bzw. **Generalunternehmer** zu präsentieren, der **für die "Risiko-Probleme" des Kunden** adäquate Lösungen anbieten kann. Hierbei ist der Begriff "Risiko-Probleme" bewusst vage zu verstehen, um nicht von vorneherein Einschränkungen vorzunehmen.

2) Bezüglich der Kostenbelastung des Versicherungsnehmers durch die Versicherungsunternehmung sind im Prinzip zwei Varianten zu unterscheiden. Zum einen kann dies implizit über eine sogenannte "**Dienstleistungsversicherung**" erfolgen, bei der der Kunde pauschal zur Finanzierung der Dienstleistungen, die für alle Versicherten aus dem entsprechenden Versichertenbestand erbracht werden, beiträgt. Eine separate Rechnungslegung für die Dienstleistungen wird nicht erstellt. (Beispiel Autoversicherungen).

Zum anderen können für die einzelnen erbrachten Dienstleistungen Honorare gemäss einer **Honorarordnung** in Rechnung gestellt werden (z.B. bei Kollektivlebensversicherungen Expertisen für autonome Stiftungen).

2.4. Die Versicherungsprämie

2.4.1. Grundlagen

Unter **Versicherungsprämie (Tarifprämie)** wird der gemäss Versicherungstarif bestimmte **Preis für das Produkt Versicherung** verstanden. In den meisten Fällen ist die Versicherungsprämie gleich dem effektiven Preis, den der Versicherungsnehmer für den Kauf des Produktes Versicherung zu entrichten hat. Die wesentlichen **Ausnahmen** werden durch die **überschussberechtigten Lebensversicherungen** gebildet. Hier ergibt sich der effektive Preis aus der Tarifprämie zuzüglich der Überschussbeteiligung; letztere bewirkt eine Verbesserung des gemäss Tarif garantierten Prämie-Leistung-Verhältnisses. Für die folgenden Betrachtungen ist das nicht relevant, so dass wir zur Vereinfachung der Darstellung die Versicherungsprämie dem Preis für das Produkt Versicherung gleichsetzen.

In **Analogie zur Dreiteilung des Produktes Versicherung** kann man im allgemeinen auch für die Versicherungsprämie eine Dreiteilung vornehmen, so dass wir davon ausgehen, dass sich eine Versicherungsprämie aus den drei Komponenten

- **Risikoprämie,**
- **Sparprämie,**
- **Kostenprämie**

zusammengesetzt.

Beispielsweise werden bei Lebensversicherungen diese drei Prämienkomponenten explizit in die Tarife eingebaut.

Bei Nicht-Lebensversicherungen ist das nicht immer der Fall.

Im folgenden gehen wir kurz auf die Spezifika der Risikoprämie ein.

2.4.2. Bemerkungen zur Risikoprämie

Bei den folgenden Ausführungen wird zur Vereinfachung der Darstellung von einer einperiodigen (z.B. einjährigen) Versicherungsdauer ausgegangen.

1) Gemäss der **individuellen Äquivalenz** wird die Risikoprämie für die einjährige Versicherungsdauer zunächst aufgrund des Wertes der erwarteten Risikoleistungen (d.h. gemäss "Erwartungswert") angesetzt. Dies impliziert, dass für einen grossen Bestand gleichartiger Versicherungen die Summe der **Risikoprämien** der einzelnen Versicherten dem **Erwartungswert** der zu erbringenden **Risikoleistungen** entspricht. Die Risikoprämien der schadenfreien Versicherungen werden also zur Finanzierung der Leistungen an die

Versicherten mit Schäden herangezogen. Man spricht vom **Risikoausgleich im Kollektiv**.

Beispiel Todesfallkapitalversicherung: Man zahlt 30 Jahre lang Prämien und erhält nie eine Versicherungsleistung: Man hat überlebt! Die Garantie ist das eigentliche Produkt, nicht die Geldzahlung.

Würde dieses Äquivalenzprinzip strikt angewendet, bestünde für die Versicherungsunternehmung die Gefahr eines Verlustes in der zugrunde liegenden einjährigen Versicherungsdauer (z.B. wenn die effektiven Risikoleistungen den im voraus bestimmten Erwartungswert übersteigen). Um ein **angemessenes Sicherheitsniveau der Versicherungsunternehmung** im Laufe der Zeit zu gewährleisten, ist es unabdingbar, **Sicherheitszuschläge** auf die nach dem Äquivalenzprinzip berechnete Risikoprämie zu erheben. Dies ist auch im Interesse der Versicherungsnehmer, da so die Sicherheit zur Erfüllung der Garantie erhöht wird. Diese Sicherheitszuschläge dienen zumindest teilweise zur Kompensation der negativen Auswirkungen des **Zufallsrisikos**, welche darin bestehen, dass die realisierten Risikoleistungen über dem entsprechenden Erwartungswert liegen.

Bei einer mehrperiodigen Betrachtung verkomplizieren sich die Sachverhalte sehr schnell, **da zusätzlich Ausgleichseffekte im Laufe der Zeit** zu berücksichtigen sind. Beispielsweise könnten eventuelle Verluste bis zu einer gewissen Höhe aus einer Versicherungsperiode durch vorgängig erzielte und zurückbehaltene Gewinne ausgeglichen werden. Ferner kann das **Äquivalenzprinzip** zur Bestimmung der Risikoprämie **auf mehrere Perioden** angewendet werden - wie das bei klassischen Lebensversicherungsprodukten mit nivellierten Prämien der Fall ist. Hier werden automatisch Elemente der Risiko-Komponente mit Spar- und Verzinsungselementen gekoppelt. Auf eine Darstellung dieser Sachverhalte wird verzichtet.

2) Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zur Bestimmung der Risikoprämie werden aufgrund versicherungsmathematischer Überlegungen aus den **in der Vergangenheit beobachteten Daten** abgeleitet. Darin sind **zwei weitere**, statistisch begründete **Risiken** enthalten, die durch Einbau entsprechender **Margen** in die Risikoprämien berücksichtigt werden.

Zum einen besteht ein **Diagnoserisiko**. Bei der Analyse der beobachteten Ereignisse kann es zu Fehlschlüssen mit negativen Auswirkungen für die Versicherungsunternehmung kommen; so können z.B. gewisse Parameter falsch geschätzt werden. Das **Diagnoserisiko ist also ein Schätzproblem**. Hierzu ist ein Charakteristikum der statistischen Testtheorie in Erinnerung zu rufen:

Im Gegensatz zu deterministischen Aussagen sind hier nur Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich, was dazu führt, dass die Akzeptanz bzw. Verwerfung einer Hypothese prinzipiell nur provisorisch ist.

Zum anderen besteht ein **Prognoserisiko**. Gewisse Eigenschaften von Zufallsvariablen können sich im Laufe der Zeit ändern. Das Prognoserisiko entsteht also dadurch, dass wir **keine sichere Information über zukünftige Entwicklungen** haben. Wie will man im Jahr 1999 die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen des Sterbeverhaltens im Jahr 2030 vorhersagen? Wir erleben zur Zeit eine Phase der Verlängerung der Lebenserwartung der Menschen. Wie soll das zuverlässig prognostiziert werden?

Um diesen beiden statistisch begründeten Risiken - Diagnoserisiko und Prognoserisiko - zu begegnen, werden in die Risikoprämie Margen eingebaut. Dies ist insbesondere dann erforderlich, wenn eine Tarifgarantie - sprich Preisgarantie - ausgesprochen wird, die sich über mehrere Jahre erstreckt. In der Lebensversicherung betragen die Laufzeiten der Versicherungsverträge teilweise 30 Jahre und mehr.

3) Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die **Risikoprämien** aus versicherungsmathematischer Sicht im Prinzip aus drei Komponenten bestehen:

- dem Erwartungswert der Risikoleistung,
- einem Sicherheitszuschlag wegen des Zufallsrisikos,
- den Margen wegen des Diagnoserisikos und des Prognoserisikos.

Die Bedeutung dieser drei Risiken hängt von den gewählten Versicherungsprodukten ab. So beeinflusst z.B. der Zeithorizont die Höhe der Diagnose- und Prognoserisiken; die Streuung der erwarteten Risikoleistungen bestimmt die Höhe des Zufallsrisikos.

Ob in einem marktwirtschaftlich organisierten Versicherungsmarkt diese Risikoprämien durchsetzbar sind, ist eine ganz andere Frage. Es handelt sich hierbei eher um eine Grösse im Sinne von "**Materialkosten**" für die Herstellung des **Risikoschutzes**.

Die **Kostenprämie** kann man dann in Analogie als **Beitrag zur Finanzierung der "Herstellungs- und Vertriebskosten"** interpretieren.

Es gibt Wettbewerbssituationen, bei denen die am Markt realisierten Preise tiefer sind als die Produktions- und Vertriebskosten und solche, wo sie höher sind.

3. Elemente der Theorie des Konsumenten ³

3.1. Die Präferenzordnung

1) Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$ ein Konsumbündel.

Gesucht wird eine **Nutzenfunktion** $u(x)$ von der Menge der Konsumbündel in die positiven reellen Zahlen, so dass mit dieser Nutzenfunktion die Entscheide des Konsumenten analysiert werden können.

Dazu wird zunächst auf der Menge der Konsumbündel eine **Präferenzordnung** \succeq definiert, die gewisse Annahmen erfüllen soll. Hierbei bedeutet $x' \succeq x''$, dass das Konsumbündel x' dem Konsumbündel x'' vorgezogen wird. $x' \succeq x''$ und $x'' \succeq x'$ impliziere $x' \sim x''$, was bedeutet, dass x' und x'' als äquivalent (indifferent) betrachtet werden.

Die Begriffe "**wird vorgezogen**" oder "**wird präferiert**" und "**indifferent**" werden als **intuitiv klar vorausgesetzt**.

2) Annahme 1: Vollständigkeit

Für je zwei Konsumbündel x' und x'' gilt:

$$x' \succeq x'' \text{ oder } x'' \succeq x'.$$

Hiermit wird sichergestellt, dass in der Präferenzordnung keine "Löcher" sind.

Die Menge der Konsumbündel kann somit unter Bezug auf das Konsumbündel x' unterteilt werden

- in die Menge der x mit $x \succeq x'$: $B_{x'}$,
- in die Menge der x mit $x \sim x'$: $I_{x'}$,
- in die Menge der x mit $x \preceq x'$: $W_{x'}$.

³Als Referenzgrundlage wird benutzt:

Microeconomics, Hugh Gravelle and Ray Rees, London and New York, 1988, first published 1981.

Die wörtlichen Zitate sind diesem Buch entnommen.

3) Annahme 2: Transitivität

Für je drei Konsumbündel x' , x'' , x''' gilt:

wenn $x' \succeq x''$ und $x'' \succeq x'''$, dann $x' \succeq x'''$.

Hieraus folgt die Transitivität für die Relation \sim .

4) Annahme 3: Reflexivität

Für jedes Konsumbündel x' gilt

$x' \succeq x'$.

Aus Annahme 3 folgt für alle x'

$x' \in I_{x'}$

und damit

$I_{x'} \neq \emptyset$.

5) Aus Annahme 2 folgt dann für x' und x'' entweder

$I_{x'} = I_{x''}$

oder

$I_{x'} \cap I_{x''} = \emptyset$.

Zum Beweis werde angenommen, dass ein x''' existiere mit

$x''' \in I_{x'} \cap I_{x''} \neq \emptyset$,

so folgt für $x^0 \in I_{x'}$:

$x^0 \sim x'$,

$\Rightarrow x^0 \sim x'''$,

$\Rightarrow x^0 \sim x''$,

$\Rightarrow x^0 \in I_{x''}$.

Analog lässt sich die umgekehrte Richtung zeigen.

Also folgt:

wenn $I_{x'} \cap I_{x''} \neq \emptyset$,

dann $I_{x'} = I_{x''}$.

6) Man kann also die Menge K der Konsumbündel darstellen als Vereinigungsmenge **disjunkter Indifferenzmengen**

$$K = \bigcup_{x \in K} I_x.$$

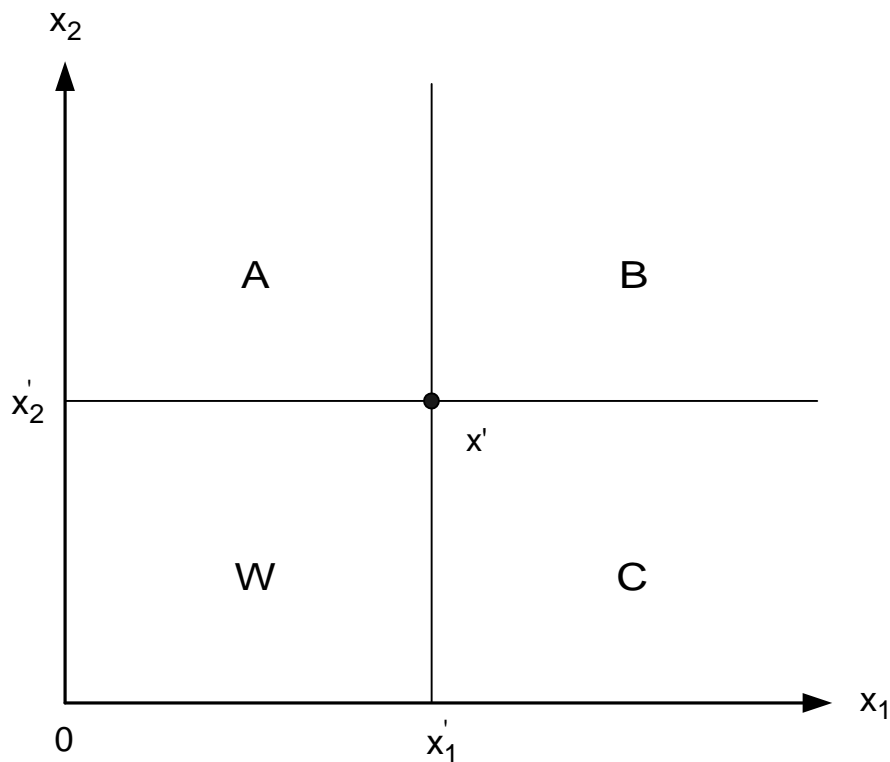
Die Menge der Indifferenzmengen kann man wiederum ordnen über die Präferenzordnung der zugehörigen Konsumbündel.

7) Annahme 4: Nichtsättigung

Ein Konsumbündel x' wird dem Konsumbündel x'' vorgezogen, falls x' wenigstens von einem Gut mehr enthält als x'' und von keinem anderen Gut weniger.

Also

$x' \succ x''$ gdw. für alle i gilt $x'_i \geq x''_i$ und
es existiert ein i_0 mit $x'_{i_0} > x''_{i_0}$.



8) Die Konsumbündel aus B (inklusive Grenzen, ausgenommen x') werden x' vorgezogen.

Die Konsumbündel aus W (inklusive Grenzen, ausgenommen x') werden weniger geschätzt als x' .

Alle zu x' indifferenten Konsumbündel müssen in A oder C liegen.

Bewegungen in Indifferenzmengen implizieren also Tausch (Substitution). Von dem einen Gut gibt man ab, während man von dem anderen Gut mehr erhält.

Indifferenzmengen können an keiner Stelle "dick" sein; sie bestehen "höchstens" aus "Kurven", da sonst Elemente aus ihnen in B oder W wären.

9) Annahme 5: Stetigkeit

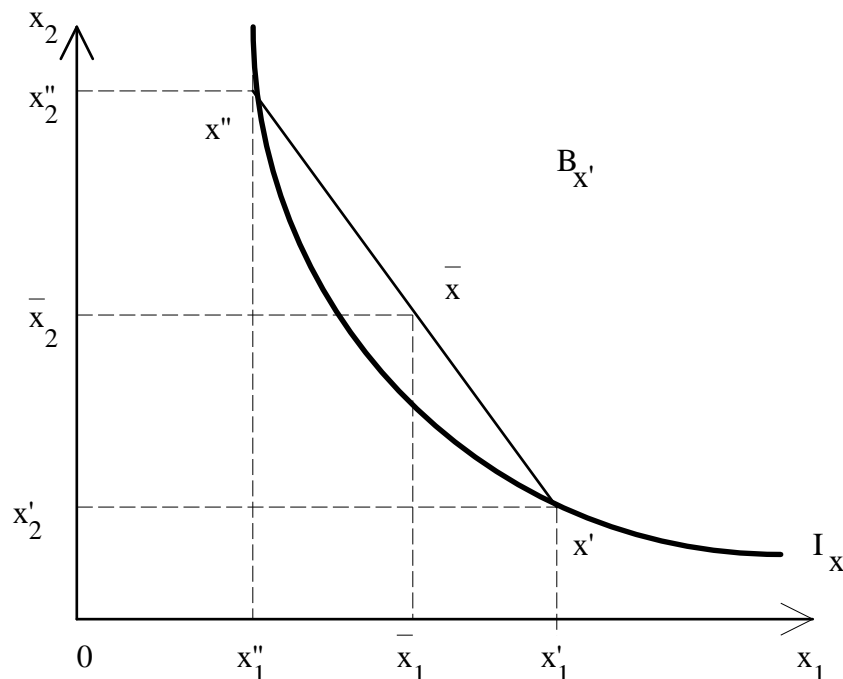
Der Graf einer Indifferenzmenge ist eine stetige Oberfläche.

Dies bedeutet, dass für je zwei Güter im Konsumbündel gilt:

Zu jeder beliebigen Reduktion der Menge des einen Gutes existiert eine Erhöhung des anderen Gutes, so dass der Konsument exakt kompensiert wird, oder anders ausgedrückt, so dass er zwischen beiden Konsumbündeln indifferent ist.

10) Annahme 6: Strenge Konvexität

Zu jedem Konsumbündel x' ist die Menge $B_{x'} := \{x \mid x \succeq x'\}$ strikt konvex.



11) In der obigen Figur gilt $x' \sim x''$.

Jeder Punkt auf der Geraden $\overline{x'x''}$, wie z.B. \bar{x} , lässt sich darstellen als

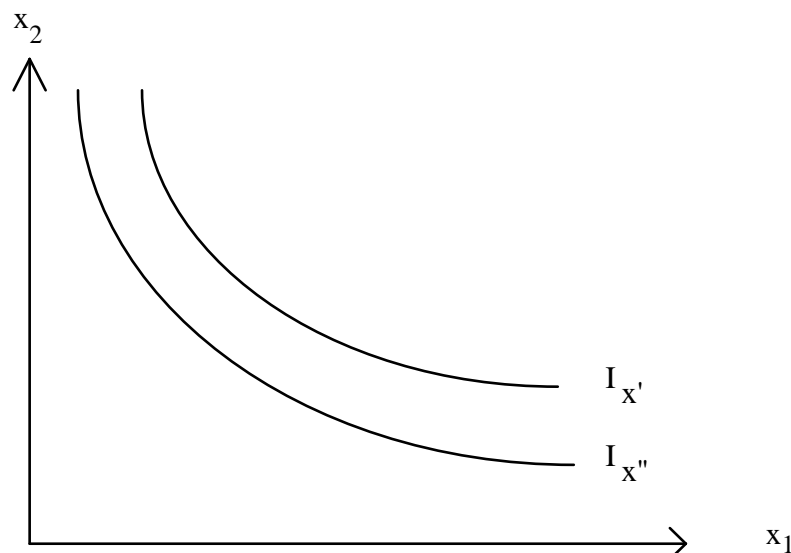
$$\bar{x} = kx' + (1-k)x'' \text{ mit } 0 < k < 1.$$

Eine solche konvexe Kombination wird auch Mischung von x' und x'' genannt.

Aus der Annahme der strikten Konvexität folgt nun, dass **jede Mischung den Ausgangsbündeln x' bzw. x'' vorgezogen wird**. Dies spiegelt eine gewisse Präferenz für geeignete **Diversifikation** wider.

"Thus, what we are saying is that the consumer always prefers a mixture of two consumption bundles which are indifferent to each other, to either one of those bundles".

12) Als Resultat aus den sechs Annahmen gilt für den Zwei-Güter-Fall, dass die Präferenzordnung des Konsumenten durch eine Menge stetiger, zum Ursprung hin konvexer Indifferenzkurven dargestellt werden kann.



Ferner gilt, dass

- jedes Konsumbündel genau auf einer Indifferenzkurve liegt,
- die Konsumbündel, die auf Indifferenzkurven liegen, die weiter vom Ursprung entfernt sind, präferiert werden, also

$$x' \succ x''.$$

Die besten Konsumbündel für einen Konsumenten liegen also auf der vom Ursprung am weitesten entfernten Indifferenzkurve.

Um zu **eindeutigen Lösungen** zu gelangen, sind also Schranken erforderlich, wie sie z.B. durch die **Budgetrestriktion** gegeben werden.

3.2. Die Nutzenfunktion

1) Wie wir unter 3.1. gesehen haben lässt sich die Basis für eine **Theorie der Konsumenten allein** mit Hilfe der **Präferenzordnung** und dem Begriff der Indifferenz legen.

Eine Nutzenfunktion ist hierzu nicht erforderlich.

Jedoch ist es für **gewisse Analysemethoden sehr hilfreich**, falls man eine Funktion hat, die eine numerische Darstellung der Präferenzordnung liefert. D.h. es ist nützlich, eine Funktion zu haben, die jedem Konsumbündel eine reelle positive Zahl zuordnet, die ihre Einschätzung durch die Präferenzordnung repräsentiert. Z.B. kann man dann die üblichen Methoden der Maximierung anwenden.

Eine Nutzenfunktion u lässt sich wie folgt definieren:

Mit Hilfe der Präferenzordnung für die Konsumbündel lassen sich Indifferenzmengen I_x definieren, die eine Partition der Menge der Konsumbündel K darstellen:

$$K = \bigcup_{x \in K} I_x$$

$$\text{mit } I_{x'} \cap I_{x''} = \emptyset$$

$$\text{oder } I_{x'} = I_{x''}$$

für x' und $x'' \in K$.

Ferner gilt:

Wenn $x' \succ x''$, dann werden alle Elemente aus $I_{x'}$ allen Elementen aus $I_{x''}$ vorgezogen.

2) Die **Nutzenfunktion $u(x)$** ordnet nun jedem Konsumbündel x eine reelle Zahl u zu, die die **Präferenzen des Konsumenten** widerspiegeln; es gilt:

$$\begin{aligned} u(x') &= u(x'') \quad \text{gdw. } x' \sim x'', \\ u(x') &> u(x'') \quad \text{gdw. } x' \succ x''. \end{aligned}$$

Jede Funktion mit diesen Eigenschaften ist eine Nutzenfunktion des Konsumenten.

"A **utility function** is merely a way **of attaching numbers to the consumer's indifference surfaces** or sets such that the numbers increase as higher or more preferred surfaces are reached. It reflects the **ordering** of the bundles by the consumer and so is an **ordinal**

function. Since, for the purposes of the theories examined in this and the two following chapters, we only require that the consumer can rank or order bundles and the utility function is a numerical representation of this ordering, **no significance attaches to size** of the difference between numbers attached to different bundles. We are concerned only with the **sign of the difference**, i.e. whether $u(x') \geq u(x'')$ or whether x' is preferred or indifferent to x'' or x'' preferred to x' ."

3) Die so abgeleitete Nutzenfunktion $u(x)$ ist lediglich eindeutig bis auf eine positive monotone Transformation:

$$v(x) = T[u(x)]$$

mit T positiv monoton (z.B. $T' > 0$).

4) Die ersten drei Annahmen bezüglich der Präferenzordnungen, nämlich die der Vollständigkeit, der Transitivität und der Reflexivität, führen zu Indifferenzmengen, die eine disjunktive Partition der Menge der Konsumbündel darstellen.

Die **lexikographische Ordnung** ist eine Präferenzordnung, die diese 3 Annahmen erfüllt, für die jedoch keine Nutzenfunktion definierbar ist.

Als zusätzliche Annahme ist die Annahme 5 der **Stetigkeit** erforderlich. Es lässt sich zeigen, dass stets eine Nutzenfunktion konstruierbar ist, falls die Indifferenzoberflächen stetig sind. Solche Nutzenfunktionen kann man dann stets auch stetig machen.

Die so erhaltenen Nutzenfunktionen sind ordinale Nutzenfunktionen.

Zur Vereinfachung der Analyse wird eingeführt

5) Annahme 7: Differenzierbarkeit

Nutzenfunktionen sind stets von der erforderlichen Ordnung differenzierbar.

6) Nun lässt sich eine einfache, jedoch **grundlegende Beziehung zwischen** der **Nutzenfunktion** $u(x)$ und den **Indifferenzmengen**, die die fundamentale Wiedergabe der Präferenzordnung der Konsumenten sind, aufzeigen.

Man betrachte die Konsumbündel x mit

$$u(x) = u^0,$$

wobei u^0 eine beliebige feste Zahl sei. Wir definieren

$$K_{u^0} := \{ x \mid x \text{ Konsumbündel mit } u(x) = u^0 \}.$$

Für den Zwei-Güter-Fall gilt

$$u(x_1, x_2) = u^0.$$

Die Bildung des totalen Differentials führt zu

$$\frac{\delta u}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta u}{\delta x_2} dx_2 = du^0 = 0$$

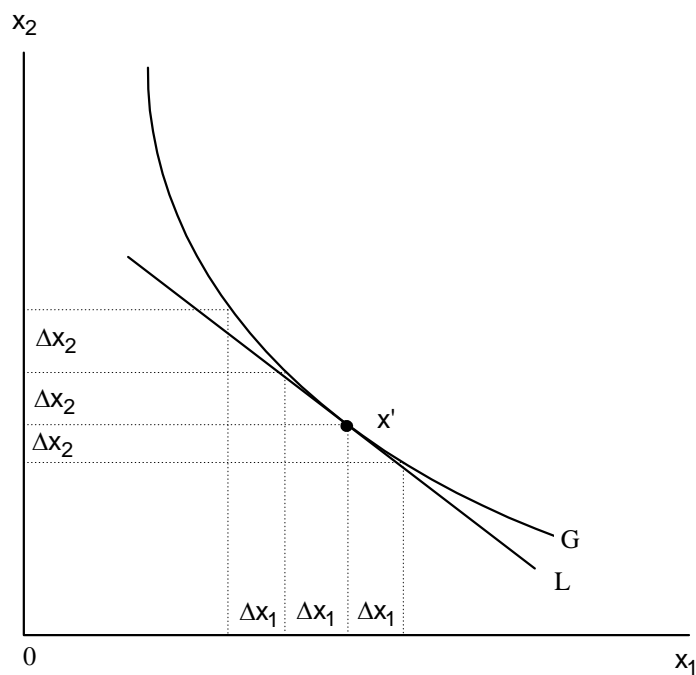
$$\Rightarrow \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{u=\text{const.}} = - \frac{\delta u / \delta x_1}{\delta u / \delta x_2}$$

= **marginal rate of substitution of good 2 for good 1**

= MSR_{21}

= **Grenzrate der Substitution**

= GRS_{21}



Durch die Bedingung

$$u(x_1, x_2) = u^0$$

wird implizit eine Funktion

$$x_2 = f(x_1)$$

definiert mit

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dx_1} &= f'(x_1) \\ &= -\frac{\delta u / \delta x_1}{\delta u / \delta x_2}.\end{aligned}$$

Man kann $x_2 = f(x_1)$ interpretieren als **Indifferenzkurve zu dem Nutzenniveau u^0** .

Es gilt also

$$K_{u^0} = I_{u^0}.$$

In diesem Zusammenhang beachte man:

"The preference ordering of the consumer uniquely determines the indifference sets and hence the marginal rates of substitution. The partial derivatives, on the other hand, depend on the particular function used to represent the consumer's preferences i.e. to label the indifference sets."

7) Wegen der Nichtsättigungsannahme gilt

$$\frac{\delta u}{\delta x_i} > 0.$$

Somit folgt

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{u=\text{const}} = -\frac{\delta u / \delta x_1}{\delta u / \delta x_2} < 0.$$

Sei T eine positive monotone Transformation, also $T' > 0$, so folgt für $v(x) = T[u(x)]$

$$\begin{aligned}\frac{\delta v}{\delta x_i} &= \frac{dT}{du} \frac{\delta u}{\delta x_i} \\ &= T' \frac{\delta u}{\delta x_i}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{v=\text{const}} &= -\frac{T' \delta u / \delta x_1}{T' \delta u / \delta x_2}, \\ &= -\frac{\delta u / \delta x_1}{\delta u / \delta x_2}.\end{aligned}$$

3.3. Die Budgetrestriktion

1) Bei der Analyse der Konsumententscheidungen geht man typischerweise davon aus, dass der Konsument ein bestimmtes **Anfangsvermögen (Anfangsausstattung)** hat bzw. über ein bestimmtes Einkommen verfügen kann. Ferner wird unterstellt, dass für alle zur Auswahl stehenden **Güter fixe Preise**, die dem Konsumenten bekannt sind, vorliegen. Schliesslich wird noch angenommen, dass nur nicht-negative Mengen konsumiert werden.

Nach diesem Konzept verhält sich der Konsument **als Mengenanpasser**.

Zur Vereinfachung der Darstellung beschränken wir uns auf den Zwei-Güter-Fall. Mit M werde das zur Verfügung stehende Einkommen bezeichnet und mit p_i ($i = 1,2$) die Preise der beiden Güter x_i ($i = 1,2$).

Der Konsument kann also **Konsumbündel (x_1, x_2)** wählen, die folgenden Bedingungen genügen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

und

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq M.$$

Die letzte Relation wird als **Budgetrestriktion** bezeichnet, die aussagt, dass die Konsumausgaben für die beiden Güter x_1 und x_2 kleiner gleich dem verfügbaren Einkommen sein müssen.

Falls in dieser Relation das Gleichheitszeichen gilt, spricht man auch von der **Budgetlinie**.

2) Die Budgetlinie lässt sich als Funktion $x_2 = f(x_1)$ darstellen:

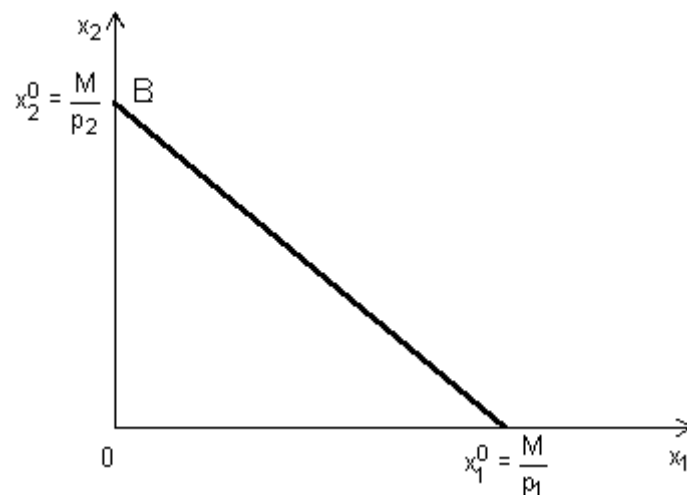
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$\text{mit } x_2 = 0 \quad \text{für } x_1 = \frac{M}{p_1},$$

$$x_2 = \frac{M}{p_2} \quad \text{für } x_1 = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2} < 0.$$



3.4. Die Konsumententscheidung

1) Die **Konsumententscheidung** lässt sich nun als folgendes **Maximierungsproblem** darstellen:

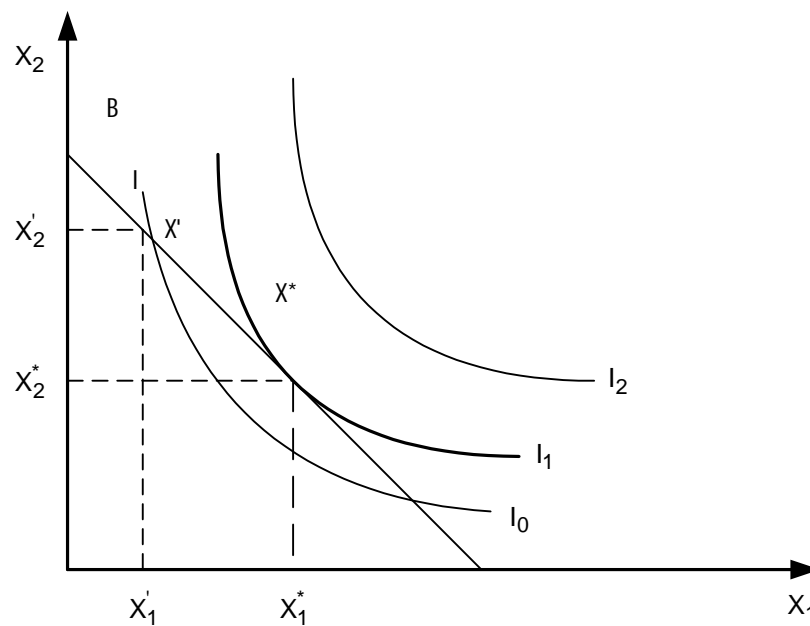
$$\max_{x_1, \dots, x_n} u(x_1, \dots, x_n)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$$

und $x_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$.

2) Im Zwei-Güter-Fall lässt sich das Problem und die Lösung wie folgt darstellen.



Wegen $\delta u / \delta x_i > 0$ für $i=1,2$ ist die **Lösung auf der Budgetlinie** zu suchen; der Konsument wird das ganze zur Verfügung stehende Einkommen konsumieren.

3) Das höchste Nutzenniveau wird da erreicht, wo **die Indifferenzkurve tangential zur Budgetlinie** ist, d.h. dort gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{u=\text{const}} &= - \frac{\delta u / \delta x_1}{\delta u / \delta x_2} \\ &= \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{M=\text{const}} \\ &= - \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

Der Konsumpunkt x^* , der den Nutzen unter den gegebenen Nebenbedingungen maximiert, ist also dadurch charakterisiert, dass dort gilt

$$\frac{\delta u / \delta x_1}{\delta u / \delta x_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

D.h.

"The consumer is in equilibrium (choosing an optimal bundle) when the **rate at which he can substitute one good for another on the market is equal to the rate at which he is just content to substitute one good for another.**

We can interpret this property of the optimal choice in a somewhat different way. If the consumer spend an extra unit of money on x_1 he would be able to buy $1/p_1$ units of x_1 . $u_1 \Delta x_1$ is the gain in utility from an additional Δx_1 units of x_1 . Hence u_1/p_1 is the gain in utility from spending an additional unit of money on x_1 . u_2/p_2 has an analogous interpretation. **The consumer will therefore be maximising his utility when he allocates his income between x_1 and x_2 so that the marginal utility of expenditure on x_1 is equal to the marginal utility of expenditure on x_2 :**

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2}.$$

This is exactly the condition obtained by multiplying both sides of

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ by } u_2/p_1."$$

Für den Spezialfall $p_1 = p_2$ folgt $u_1 = u_2$ im Optimum.